), de l'« aptitude »
ique), de la « pos-
s pleinement, telle
des derniers repré-
ntale[39].
le ce pouvoir pos-
d'une anthropolo-
énologique. Il faut
qu'ici. À partir de
ir-imageant », une
our le pouvoir ré-
humaine »), a dé-
appelons l'« endo-
mme nous l'avons
our utiliser une ex-
énéisation » a ceci
tant que « réel »,
jectif ». Et - voilà
sément dans cette
que le « réel » !
réflexion ». Cela
r n'importe quelle
ion »[40] ! Et c'est

première fonction
le soi n'apparais-
mais qu'en même
on imageante une
œuvre un projet-
e manière consti-
ce qui n'apparaît
e en même temps
ue ce projet d'une
ns imageantes de
nation), il en dé-
que projet-de-soi,

», dans notre ouvrage
logie, Würzburg, Kö-
l. 24), 2011.
iers ouvrages, le rôle
objectivante.

L'infinitésimal et l'incommensurable

MARC RICHIR

1.

Les opérations les plus élémentaires, dans la pratique, qui constitueront la base phénoménologique de l'arithmétique et de la géométrie, sont sans doute celles de compter, de mesurer des distances et des longueurs, et celles de construire des figures régulières. ~~En termes euclidiens~~ déjà considérablement ~~modernisés, cela~~ implique, d'abord le nombre comme pluralité unifiée d'unités, ensuite le choix d'unités de mesure, avec la possibilité de les diviser (donc la possibilité de rapports rationnels entre deux longueurs, c'est-à-dire aussi bien leur commensurabilité), enfin la possession (et la définition) d'instruments stables (les fameux « règle et compas » d'Euclide) pour la construction des figures. Tout cela constitue des techniques qui ne sont pas encore les mathématiques bien que nous soyons en possession de la base phénoménologique pour son institution symbolique - et nous n'entrerons pas ici dans l'analyse de ce qui fait la spécificité de son institution grecque, par exemple sur le nombre (l'unité, la *monas*, déjà, n'y est pas un nombre, pas plus qu'un rapport, rationnel en quelque sorte par définition, entre deux grandeurs).

Un autre élément important de cette base phénoménologique est ce que nous nommons l'espace qui, à proprement parler, n'existe pas comme tel chez les Grecs - la *chôra* platonicienne n'est pas l'espace et le *topos* aristotélicien n'est pas dans l'espace. Sans compter les atomistes (où il est question du vide), bornons-nous à relever que chez Aristote (*Physique*, V 227b 21-31), quelque chose *comme* l'espace est considéré avec le « *ce dans quoi* » (*en hi*) se déplace le mobile au cours d'un mouvement de déplacement (*phora*) selon le lieu. La nécessité de contourner les apories de Zénon contraint Aristote à considérer que tout comme le mouvement est un et indivisible, l'« espace » de ce mouvement l'est aussi, et que tout ce que l'on peut accorder à la divisibilité de l'« en quoi » en général, c'est qu'elle est infinie *en puissance* et jamais en acte. La nature, autrement dit, « ne fait pas de sauts », il n'y a pas de lacune dans le déplacement, et pas davantage dans le mouvement « spatial » et sa trajectoire. Le point en effet est *nul*, au sens où pris comme tel, il ne peut constituer un élément ou une partie de la ligne (trajectoire) et est lui-même sans parties : ce qui veut dire qu'abstraction faite de sa diastase possible, il est non « spatial », et c'est là ce qui fait une part des apories de Zénon. Si ~~l'on admet donc~~ que les lignes sont définissables de manière *cinématique*, c'est-à-dire par des mouvements réels ou imaginaires (idéaux) d'un point comme corps mobile, cela signifie que les lignes (et en particulier la droite) sont *continues*, c'est-à-dire sans lacunes, et que leurs segments sont toujours susceptibles de trouver une commune mesure, à savoir sont commensurables. C'est ce que traduit, à sa manière, le célèbre axiome dit d'Archimède : pour toute grandeur a et toute grandeur b positives, il y aura toujours un nombre n tel que

$$na > b \quad (\text{si } a = 1, n > b)$$

étant entendu que nous comprenons ici par grandeur l'expression numérique d'une longueur, en termes de nombres ou rapports d'unités de mesure.

Au sens qui sera le nôtre ici, la mathématique proprement dite s'institue avec la découverte des grandeurs *incommensurables*, qui sont littéralement des paradoxes ou des contradictions puisqu'il s'agit de « rapports irrationnels ». Le premier exemple, le plus connu, vient de ce que la somme des carrés des longueurs des deux côtés d'un triangle rectangle égale le carré de la longueur de son hypoténuse (théorème dit de Pythagore), si bien que, par exemple si le dit triangle est isocèle et si l'on choisit chacun des côtés comme unité de mesure, on a $1^2 + 1^2 = 2$, en sorte que le rapport de la longueur de l'un des côtés à la longueur de l'hypoténuse est, dans notre écriture, $\sqrt{2}$, incommensurable à l'unité (irrationnel). Le paradoxe est que le segment de droite constitué par l'hypoténuse est bien « réel », qu'il a donc bien une longueur, mais que celle-ci est impossible à mesurer, *quelle que soit l'unité de mesure choisie*. Certes, les Grecs ont inventé une méthode de calcul de cette longueur par approximations successives, donc une technique d'approche (un algorithme) de l'incommensurable d'aussi près que l'exige le contexte pratique, mais ce, sans aller à l'infini (à la limite des approximations), si bien que le paradoxe demeure de savoir si $\sqrt{2}$ est encore un nombre, s'il est, ou non, radicalement indéterminé, ou seulement indéterminé pour nous, le passage de l'être-en-puissance à l'être-en-acte demeurant, quant à lui, inaccessible.

Le même paradoxe se pose, on le sait, à propos du rapport entre la longueur du diamètre d d'une circonférence cf et la longueur de cette dernière. Rapport pareillement irrationnel, que l'on écrit $cf/d = \pi$, avec cette circonstance pour ainsi dire aggravante que si π est un nombre déterminé, c'est un nombre que nous nommons, depuis Lindemann (1882), « transcendant » (ne pouvant être racine d'aucune équation algébrique). Et comme pour les nombres ayant en général la forme $\sqrt[m]{n}$ pour lesquels il y a des modes de calcul par approximations successives, les Grecs (Archimède : les quadratures et la méthode dite d'exhaustion) en ont inventé pour le nombre π, et nous pourrions faire le même commentaire : il est impossible de penser que la circonférence de diamètre d n'ait pas une longueur bien précise exprimable par un nombre, et cependant, ce nombre nous demeure inaccessible, mérite bien son appellation de « transcendant ».

Si la mathéma
gager dans la red
a appelé la recher
de nombre, ce qu
premières définiti
et Cantor dans le
logique, celle de
Frege. On y trouv
désigne conventic
ordonnée (elle a
un successeur n -
un successeur, et
les nombres ratio
à supposer (Canto
cardinal (qui est c
potents) est un n
de transfini), on p
est équipotent à l
sur l'ensemble de
propres », ce qui e
de cet ensemble.
ainsi définis comm
tous les nombres

Dans cette th
caractéristique qu
Les ensembles d
Frege) sont, selo
dire d'éléments n
cement, au moins
les points peuven
(par exemple) de
droite, un point-o
nombre (en géné
proquement (bije
point B correspo
ment AB a pour
« compter » de g
comme *nombres*

On peut par e
cisses, un triangle
compas dont la p
l'abscisse est cen
avons signalé (il
bien réel en vertu

Si la mathématique doit constituer un corpus cohérent, il faut donc s'engager dans la redéfinition complète du concept de nombre, c'est ce que l'on a appelé la recherche des fondements. Sans faire ici un historique du concept de nombre, ce qui n'est pas notre objet, contentons-nous de rappeler que les premières définitions rigoureuses (quoique circulaires) sont dues à Dedekind et Cantor dans le champ strictement mathématique, et à Frege dans le champ logique, celle de Dedekind - Cantor étant finalement équivalente à celle de Frege. On y trouve la définition stricte de la suite des entiers naturels, que l'on désigne conventionnellement par $\mathbb{N}$, et qui a pour caractéristique d'être bien ordonnée (elle a un premier élément, et un élément quelconque n a toujours un successeur $n + 1$), et d'être sans fin, puisque, quel que soit n, il a toujours un successeur, et ainsi de suite. Il est facile, sur cette base, de construire tous les nombres rationnels (toutes les fractions d'entiers naturels) concevables. Et à supposer (Cantor) que la suite $\mathbb{N}$ soit un ensemble (transfini) dont le nombre cardinal (qui est classe d'équivalence de tous les ensembles qui lui sont équipotents) est un nombre déterminé (quoique infini, d'où le concept cantorien de transfini), on peut montrer que l'ensemble supposé des nombres rationnels est équipotent à l'ensemble des entiers naturels - il est dénombrable, et donc sur l'ensemble de tous ces nombres, l'ensemble des n est l'une de ses « parties propres », ce qui est, pour Dedekind et Cantor, un critère de l'infinité transfinie de cet ensemble. Autrement dit, on peut « numéroter » (par des entiers naturels ainsi définis comme nombres d'ordre, c'est-à-dire comme nombres ordinaux) tous les nombres rationnels par des nombres entiers naturels.

Dans cette théorie des nombres, que nous simplifions à l'extrême, il est caractéristique que plus aucune mention explicite ne soit faite à l'« espace ». Les ensembles de Cantor et de Dedekind (ou les extensions de concepts de Frege) sont, selon l'expression de Cantor, des ensembles de *points*, c'est-à-dire d'éléments non spatiaux. Cependant, l'« espace » se réintroduit subrepticement, au moins dans l'historique des problèmes d'Analyse, par le fait que les points peuvent toujours être portés sur une droite, selon l'axiome cantorien (par exemple) de continuité arithmétique : si l'on choisit arbitrairement, sur une droite, un point-origine (un point-zéro), à tout point de la droite correspond un nombre (en général : un nombre réel, nous allons y venir) et un seul, et réciproquement (bijection). On rejoint ainsi la géométrie (l'espace) puisqu'à tout point B correspond une abscisse b *comptée* depuis l'origine et que tout segment AB a pour mesure $b - a$ si B est à droite de A et si l'on convient de « compter » de gauche à droite ($b - a > 0$). Qu'en est-il dès lors des radicaux comme *nombres* irrationnels ?

On peut par exemple construire $\sqrt{2}$ en construisant, depuis l'axe des abscisses, un triangle de côté unité et en rabattant l'hypoténuse sur cet axe avec un compas dont la pointe est sur le point origine. On obtient ainsi un point dont l'abscisse est censée donner un nombre quoiqu'il suscite le paradoxe que nous avons signalé (il est incommensurable à tout nombre rationnel et cependant bien réel en vertu de l'axiome de continuité).

Comme on le sait, il est revenu au génie de Dedekind, instruit il est vrai par l'Analyse, de dégager le nombre irrationnel par la célèbre méthode de la coupure d'un intervalle donné de nombres rationnels en deux sous-ensembles A_1 et A_2. Sans reprendre ici l'exposé suffisamment connu de la « construction » de Dedekind, ce qui nous intéresse ici est la manière dont, profitant de l'Analyse, c'est-à-dire du concept de limite vers quoi tend une suite de nombres, il court-circuite les procédés d'évaluation par approximations successives et redéfinit l'incommensurabilité. Il prend pour ce faire la coupure sous sa forme :

$$n^2 < d < (n+1)^2$$

et montre que d ne peut appartenir ni à l'ensemble A_1 des n^2 ni à l'ensemble A_2 des $(n+1)^2$ (il n'est ni le plus grand élément de A_1 ni le plus petit élément de A_2), mais se trouve quelque part *entre* A_1 et A_2 ; et dans la mesure où il lui correspond un point et un seul sur l'axe des abscisses, il est bien *réel*. Il constitue même une limite d'une suite convergente de nombres rationnels, c'est-à-dire une limite de points de l'axe des abscisses mais, pour ainsi dire, de nature différente. En ce sens, donc, il constitue une *lacune* dans la suite faussement considérée comme continue des nombres (et des points) rationnels. Si l'on remarque, en outre, que cette construction, par généralisation, ne concerne que les radicaux, qui sont infinis dénombrables comme racines possibles d'équations algébriques (dont l'ensemble est infini dénombrable), on s'aperçoit, par la construction que leur ensemble est pour ainsi dire plus abondant que l'ensemble réuni des entiers naturels et des rationnels (lequel est donc inclus dans le premier) tout en étant encore infini dénombrable (indexable en ses éléments par des entiers naturels). Il en ira autrement des « irrationnels » qui ne peuvent être racines d'équations algébriques, c'est-à-dire de ces « incommensurables » que sont les nombres transcendants, qui ne peuvent être définis positivement comme tels par la coupure, ni même, à ce jour, être définissables positivement (on démontre leur existence par l'absurde en montrant la contradiction qu'engendre la supposition qu'ils soient racines d'équations algébriques), sinon par l'argument cantorien de la diagonale qui lui-même suppose que l'on admette l'existence de l'infini actuel et la validité de la conjecture cantorienne du continu ($\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$). De la sorte, l'axiome du continu arithmétique revient à définir ce qu'on appelle en mathématique, un ensemble uniformément dense de points, et s'il s'agit d'un « segment » incluant ses extrémités, d'un ensemble compact uniformément dense.

De la sorte également, si l'on prend, toujours avec cet axiome, l'ensemble des entiers naturels et des rationnels, on s'aperçoit qu'il est en quelque sorte uniformément *lacunaire*, laissant entrevoir, dans chacune de ces lacunes (qui sont en nombre infini dénombrable) les irrationnels algébriques comme se trouvant « à l'horizon » ou à l'infini de ces dernières, et si on les réunit à leur tour avec l'ensemble initialement constitué, il apparaît qu'il y a encore d'autres lacunes dans ces lacunes, et encore plus abondantes, tant, qu'elles ne sont même plus dénombrables, laissant paraître, comme à leur horizon, des

nstruit il est vrai par
méthode de la cou-
sous-ensembles A_1
« construction » de
ofitant de l'Analyse,
e nombres, il court-
cessives et redéfinit
is sa forme :

n^2 ni à l'ensemble
e plus petit élément
s la mesure où il lui
bien *réel*. Il consti-
rationnels, c'est-à-
ainsi dire, de nature
la suite faussement
tionnels. Si l'on re-
n, ne concerne que
s possibles d'équa-
, on s'aperçoit, par
abondant que l'en-
st donc inclus dans
ble en ses éléments
els » qui ne peuvent
ncommensurables »
éfinis positivement
inissables positive-
nt la contradiction
ns algébriques), si-
e suppose que l'on
jecture cantorienne
rithmétique revient
niformément dense
ités, d'un ensemble

xiome, l'ensemble
st en quelque sorte
de ces lacunes (qui
briques comme se
si on les réunit à
ît qu'il y a encore
es, tant, qu'elles ne
leur horizon, des

infinis dans l'infini lui-même. Certes, ce que nous disons là n'a rien de mathématique, mais ouvre à la phénoménologie, au moins par l'imagination sans laquelle tout cela ne serait qu'un jeu compliqué et purement formel. Il nous faut donc en venir à une explicitation critique-phénoménologique de la notion de continu, d'« espace » et de ce que l'on a nommé l'« arithmétisation de l'Analyse » - sorte de folle tentative, à nos yeux, d'éliminer toute « intuition » (imagination) de la mathématique. Toute la question phénoménologique est évidemment de savoir *de quoi* on parle quand on parle d'« intuition », et ce sera ici *notre* question.

2.

Classiquement, et eu égard à l'arithmétisation de l'Analyse, le continu arithmétique est opposé au continu « géométrique » dont le concept a été dominant depuis les Grecs jusqu'au XIX^e siècle. En fait, selon nous, plutôt que de parler d'un continu géométrique, il faudrait parler d'un continu *cinématique*, dans la mesure où pour passer d'un point à un autre sur toute ligne concevable, il faut un *mouvement*, fût-il idéal (comme pour calculer des approximations par accroissements des valeurs de ce qui sera une fonction), et c'est ainsi que l'on comprend que la ligne considérée est continue : le mouvement, fût-il idéal (ou imaginaire, nous y reviendrons) ne peut s'effectuer en sautant brusquement au-dessus de lacunes. Tout au plus peut-on l'arrêter en pensée, c'est-à-dire en abstraction. Au fond, la pensée implicite dans toute la tradition classique a été formulée explicitement par Aristote dans le cadre de sa *Physique* : le mouvement est un et n'est divisible, même divisible à l'infini (selon la résolution des apories de Zénon), qu'en puissance. C'est pourquoi l'étude des courbes et de leur « quadrature » ne peut se faire qu'en mathématique, par abstraction, selon ce qui sera retenu comme la « méthode d'exhaustion » attribuée à Archimède, et où l'on poursuit la division - jusqu'à arriver, au XVII^e siècle, avec Newton (il est vrai plutôt « polarisé » par la physique), à la conception de grandeurs fluentes, évanouissantes, et même, avec les fluxions, à la conception des « vitesses » d'évanouissement (ou, en général, de variation infinitésimale de ce que l'on nomme si bien la variable), étant entendu, en cela, que le « temps » (qui peut être idéal ou imaginaire) en lequel se produisent ces variations est lui-même continu et uniforme (ce que l'on retrouvera encore chez Husserl). Qu'il y ait là quelque « intuition » de l'espace - « intuition » qualifiée de « naïve » par les mathématiciens -, c'est une question qui reste à discuter tant en ce qui concerne l'« intuition » qu'en ce qui concerne l'« espace » que nous mettons entre guillemets phénoménologiques.

Quand, au XVII^e siècle, on aborde, avec l'institution de l'Analyse (Leibniz, Newton), des divisions infinitésimales, le problème devient crucial de savoir ce qu'il en est proprement d'intervalles (en principe spatiaux) *infiniment petits*. C'est sans doute ce problème qui, au moins pour une part, a conduit à l'arithmétisation. Mais c'est selon nous, pour donner au paradoxe que nous avons relevé à propos des nombres, une expression plus rigoureuse, et à notre sens, plus irréductible. Les intervalles et les variations de grandeur infiniment petite (les différentielles) avaient été conçus par Leibniz (et en un sens légèrement différent par Newton) comme des *fictions* ou des auxiliaires (des *artefacts*) du calcul permettant d'étendre à l'infini les méthodes d'approximation, en reconnaissant qu'il serait absurde de fixer l'infiniment petit par une grandeur atomique (indivisible) qui serait dès lors commune mesure universelle - et l'on comprend le souci de mathématiciens comme Newton, d'Alembert, ou encore Cauchy de le considérer comme *variable*, *fluent* et essentiellement évanouissant, sans que le paradoxe s'en trouve « résolu » puisqu'il paraît absurde que la pensée mathématique calcule avec de l'instable, et même, dans cette mesure, de l'insaisissable.

La naïveté fut de croire que l'arithmétisation permettrait au moins de dissoudre le problème, alors que la « méthode de l' ε,δ » (Cauchy, Weierstrass : $|x_i - x_j| < \varepsilon$ pour $i,j > \delta$) ne fait que l'exprimer en termes mathématiques. Mais prenons au sérieux l'axiome de continuité arithmétique, en vertu duquel, nous l'avons dit, il existe une bijection entre *tout* point (quelconque) d'un segment de droite et tout nombre réel (quelconque), étant compris que la droite n'est pas composée de points, qu'elle ressort, comme « géométrique », de la cinématique. Au moins établit-on par là la stricte *coïncidence* à soi des points (portés par la droite) et des nombres qui leur sont associés par la bijection. De même disjoint-on, sans les séparer, le concept de nombre du concept de mesure d'une longueur (si A est, sur le segment de droite d'origine O et où l'on choisit de compter de gauche à droite, d'abscisse a, et si B est sur le même segment à droite de O et d'abscisse b, la grandeur du segment AB est $l = b - a$, exprimable elle-même par un nombre), et si l'on ordonne les nombres de telle manière que si $a \neq b$, on a $a < b$ ou bien $a = b$ ou bien $a > b$, il vient que, par là, le nombre (ordinal) est d'abord, pour ainsi dire, indicateur d'ordre. De la sorte, on semble bien avoir éliminé l'« espace » et le mouvement puisque pour passer d'un point à un autre il n'est plus besoin que de la bijection - pour passer de P à Q, il suffit de passer par la bijection de P au nombre p, puis dans l'ensemble des nombres, de p à q, et de là, à nouveau par la bijection, de q à Q. Reste, ce qui est hautement problématique, que l'on présuppose par là que l'on dispose de *tous* les nombres (réels) et de *tous* les points (réels par définition) de la droite, au moins idéalement, à savoir que l'on présuppose établie l'existence de l'infini actuel.

La difficulté la plus grave, cependant, n'est pas là. Considérons, en effet, par exemple, ce qu'on appelle en Analyse la limite d'une suite convergente quand le nombre de ses termes tend vers l'infini. Il y a deux manières de considérer la situation. *Ou bien* l'on maintient partout l'expression « tendre vers », et l'on dira qu'il n'y aura jamais un terme de la suite qui atteindra (égalera) la limite et celle-ci restera à jamais *à l'horizon* de la suite, les termes de celle-ci s'en rapprochant indéfiniment - un peu comme dans la situation que nous avons déjà commentée des irrationnels par rapport aux rationnels. Notons déjà que, sans le remarquer, nous avons parlé de « rapprochement » à l'infini, ce qui, inévitablement, est un terme qui évoque au moins une *imagination* de l'« espace », et même d'un intervalle spatial de plus en plus petit, cela alors même que nous n'avons pas posé ou présupposé l'infini actuel. La suite est infinie comme l'est la suite bien ordonnée des entiers naturels, sauf que nous y avons sélectionné une suite qui converge vers un nombre réel déterminé. Et certes, on pourra dire, nous y reviendrons, que les intervalles de plus en plus petits entre les éléments de la suite et la limite *finissent* par compter *comme rien* et qu'il s'agit d'une congruence (Leibniz) ou d'une équivalence (Analyse non standard), et non d'une égalité stricte. La question est, quoi qu'il en soit, bien évidemment celle-ci : *à partir de quand* les intervalles de plus en plus petits finissent-ils par compter comme rien ? Plus brutalement : à partir de quand « sort-on » de l'« espace » imaginé et supposé par l'intervalle ? Et si l'on en « sort » où donc « rentre-t-on » ? Telle est bien, en l'occurrence, notre question phénoménologique. *Ou bien* l'on pose l'infini actuel, et l'on dit que la suite *passe à la limite* pour y trouver son terme ou son *telos*. Mais le paradoxe n'en est pourtant pas éliminé, car ce passage consiste en un *saut*, et un saut par-dessus une discontinuité. La question est dès lors de savoir en quoi consiste ce saut, ce qu'il y a, s'il y a quelque chose, dans cette discontinuité, autrement dit de savoir, si ce saut est légitime, *ce qui se passe* dans le saut. Est-il, dans l'instant, saut hors du temps et de l'« espace » ? Lui correspond-il une base phénoménologique, ce que nous nommons quant à nous un écart comme rien d'espace et de temps ? Il suffit de poser ces questions pour entrevoir la complexité des réponses phénoménologiques qui doivent leur être apportées.

3.

Considérons la suite convergente $s = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ou, ce qui pour nos réflexions est équivalent, la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: plus on « avance » dans la suite ou plus on accumule les opérations d'addition, plus la différence (mesure) $|a_{n+1} - a_n|$ est petite, plus, par conséquent, on se rapproche de la limite. Ce qu'on écrit depuis Cauchy : $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$, ε étant un nombre plus petit que n'importe quel nombre donné d'avance, pour un nombre n plus grand que n'importe quel nombre donné d'avance (ε plus petit que ε' arbitrairement petit et n plus grand que n' arbitrairement grand, le problème étant déjà que si n' a un successeur, il n'en va plus de même pour ε et ε'). C'est dire, dans un langage qui était déjà celui de Newton, que la mesure de $|a_{n+1} - a_n|$ est une quantité *évanouissante*, et qu'il y a bien un lien intime, mais problématique, entre différentielle (ou fluente) et limite. Deux formules, à cet égard, nous paraissent intéressantes du point de vue phénoménologique, celle de d'Alembert, et celle de Cauchy - même si les mathématiciens « purs » les ont rejetées.

D'Alembert tout d'abord, dans l'article « Différentiel » de l'*Encyclopédie* :

> Nous ne dirons pas [...] qu'une quantité est infiniment petite non avant qu'elle s'évanouisse, non après qu'elle est évanouie, mais dans l'instant même où elle s'évanouit [...] Nous dirons qu'il n'y a point dans le calcul *différentiel* de quantités infiniment petites ...

Dès lors, la formule de Cauchy dans son *Cours d'analyse* (citée par Sebestik dans son ouvrage sur Bolzano) :

> Les infiniment petits sont des « fantômes de quantités disparues ».

Ce qui rejoint la formule de Leibniz selon laquelle ils sont des fictions nécessaires, par leur commodité, au *calcul*. Fictions qui sont donc bien mathématiquement comme rien, inassignables, classiquement, par des nombres (réels) ou par des différences de nombres (réels), c'est-à-dire des quantités. Mathématiquement, on sort du domaine régi par l'axiome dit d'Archimède où, rappelons-le, quels que soient a et b (avec $a < b$), il y a toujours un nombre n tel que $na > b$. Si a est un nombre (ou une quantité) infiniment petit, on aura toujours, quels que soient n et b, et si ε désigne l'infiniment petit en question : $n\varepsilon < b\varepsilon$. ε est inassignable, ne peut constituer la mesure ultime (atomique) d'un intervalle infiniment petit, et c'est ce qui justifie qu'on parle à son propos de fiction ou de fantôme. Ce qui est manière de dire, phénoménologiquement, c'est-à-dire si l'on ne se contente pas du formalisme du calcul, que ε est un « produit » de l'*imagination*, qui sauve le calcul, et toute l'Analyse, de l'automaticité dépourvue de sens. Si l'« intuition » est si rebelle à son élimination dans le corps de l'Analyse, si les théorèmes et démonstrations de celle-ci on un sens et ne sont pas de simples formules vides, c'est que l'« intuition » en question est précisément une « intuition » de l'imagination, celle où le mathématicien, d'une manière ou d'une autre, *imagine* des intervalles, et des intervalles de plus en plus petits par division, celle-ci étant mathématiquement réglée par une loi censée être fixe.

Les deux formules que nous avons citées sont intéressantes dans la mesure où la première, d'inspiration newtonienne (et que d'Alembert finit par rejeter), en reprend la notion de « moment » et parle de l'*instant* de l'évanouissement, instant non temporel car seulement imaginé et donc en lui-même sans diastase (laquelle ne relève que de l'acte même d'imaginer). Cette conception de l'instant nous fait penser à celle par laquelle Descartes, dans les *Principes* (II, §39), explique la conservation du mouvement (et le principe d'inertie) : « Dieu ne le conserve pas comme il a pu être quelque temps auparavant, mais comme il *est précisément au même instant qu'il le conserve.* » Dans les deux cas, il s'agit de l'accompagnement dans l'instant d'un mouvement (d'un côté, l'évanouissement, de l'autre, un mouvement physique), donc sans que cet « accompagnement » soit lui-même mobile : il est plutôt saisie « au vol » par une sorte de coup d'œil de l'imagination. Coup d'œil appelé, dans son corrélat noématique, à disparaître pour ainsi dire aussitôt (l'instant est cartésien, c'est-à-dire sans diastase, sans passé et sans avenir), ce pourquoi, dans ce qui en laisse une trace (mathématique), il s'agit bien, selon la formule de Cauchy, du *fantôme* de quantités disparues (les $\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon''$ etc.). Si l'esprit du mathématicien n'a pas besoin de suivre les éléments de la suite, terme à terme, dans le temps, pas plus qu'il n'a besoin d'effectuer terme à terme les additions de la série (rappelons que nous avons supposé la convergence des deux) - et pas davantage non plus qu'il n'a besoin de compter, terme à terme, tous les entiers naturels de l'ensemble -, c'est bien qu'il aperçoit d'un coup leur successivité au moins potentiellement infinie, mais, dans le même « moment » (au sens non newtonien du terme), qu'il imagine, à l'horizon, un intervalle (« spatial ») qui se rétrécit à mesure qu'il progresse (en esprit), jusqu'à se réduire, comme l'a bien vu l'Analyse non standard, à un infiniment petit qui n'est plus un intervalle (« spatial ») mais dans nos termes un *écart comme rien d'espace et de temps* (« l'instant de l'évanouissement » ou l'instant cartésien de la conservation) qui, en Analyse non standard, constitue l'écart dans une certaine mesure mathématiquement « traitable », entre nombres réels (fonctions réelles) et nombres « hyperréels » (fonctions « hyperréelles ») dont les nombres et fonctions réels sont les « ombres ». Par là les nombres et fonctions atteints « à la limite » permettent d'identifier les limites à un écart près qui ne compte classiquement pour rien, mais qui n'est pas rien, à condition de considérer un modèle non standard de l'arithmétique (Skolem, 1934) où il existe au moins un entier naturel (pour Cantor, , le premier ordinal transfini) plus grand que tous les autres, ce qui permet d'étendre la structure algébrique de « corps » à l'ensemble de tous les nombres réels. Mais en une extension transgressant l'axiome dit d'Archimède sur cette extension.

Avant d'expliciter tous ces points, il nous faut montrer en quoi, si l'imagination de l'intervalle de plus en plus petit est bien « intuitive » et fait bien intervenir, comme telle, la diastase (spatiale et temporelle), l'écart comme rien d'espace et de temps tel que nous l'avons circonscrit jusqu'ici n'est l'objet d'aucune « intuition », fût-elle imaginative. Notre thèse est qu'il constitue la part non figurable d'une *phantasia* « perceptive ». En effet, l'imagination d'un intervalle (fût-il entre points, donc entre nombres) décroissant jusqu'à l'évanouissement (dans l'instant) a, comme toute imagination, une base phénoménologique qui est une *phantasia.* Ce qui, dans l'imagination, laquelle est un acte intentionnel, est fictif, c'est l'« apparence "perceptive" » (l'intervalle infiniment petit) figurant le *Bildsujet* qui est ici l'écart comme rien d'espace et de temps. À proprement parler, étant donné la structure intentionnelle de l'acte (sa corrélation noético-noématique), l'imagination pourra toujours viser la *division* de l'intervalle en intervalles de plus en plus petits - et ce seront toujours des intervalles -, mais jamais l'évanouissement même de l'intervalle, son anéantissement, et le fait mathématique qu'il compte pour rien. Pour tenir les deux ensemble, l'intervalle et son évanouissement, il faut laisser pour ainsi dire jouer la transposition architectonique en sens inverse, et retourner à la base phénoménologique plus archaïque de l'imagination, c'est-à-dire à la *phantasia* « perceptive » en tant qu'elle « perçoit » non intentionnellement l'intervalle comme sa partie figurée et l'écart comme rien d'espace et de temps comme sa partie *infigurable*. Si bien que le rapport d'une suite ou d'une série convergentes à leur limite respective n'est pas la coïncidence d'un supposé terme ultime de la suite avec sa limite, ni celle ou la somme supposée achevée de la série avec sa limite, mais un rapport de *contact* en et par écart comme rien d'espace et de temps (le rien de temps étant précisément l'instant cartésien insaisissable) avec la limite. Contact par non coïncidence que Leibniz, déjà, nommait « congruence » (égalité à un dx près qui compte pour zéro), et que Bolzano, puis A. Robinson dans l'Analyse non standard, ont nommé « équivalence ». Dès lors, ce qui est proprement fictif ou simulacre, c'est la tentative contradictoire en soi de figurer cet écart par un intervalle et par suite, d'y concevoir une quantité, si petite soit-elle. Dès lors aussi, passer à la limite est bien « sortir » hors de l'espace et du temps, et passer par cet écart n'implique pas nécessairement un saut dans l'infini actuel puisque l'écart est là, déjà, au moins virtuellement, dans tout intervalle, mais pour ainsi dire voilé par la diastase spatialisante/temporalisante.

Cela explique que l'arithmétisation de l'Analyse, si elle ne se réduit pas à un « jeu » de construction purement formel, ne résout finalement pas (sinon par des artifices de langage, par exemple le langage « $\varepsilon - \delta$ ») les difficultés initiales du calcul infinitésimal, trop massivement attribuées à ses origines dans la géométrie. Cela explique aussi que, depuis l'Analyse, on puisse si aisément faire retour à l'« espace » par la topologie différentielle, en posant des points et leur voisinage (leur diastase, non pas spatiale, mais spatialisante), et même à des « espaces métriques » pour peu que dans ce voisinage, on pose l'existence d'une structure métrique (l'expression mathématique, par un ds^2, de l'élément de distance entre le point et un point de son voisinage). Il n'empêche que demeure dans l'esprit mathématicien cette naïveté phénoménologique d'avoir cru contourner, par le raffinement extrême de ses méthodes, le problème du *continu*. Il est vrai que selon nous, celui-ci a changé de « nature » phénoménologique puisque le contact ne se fait plus, au registre phénoménologique le plus archaïque, par contigüité d'atomes auto-coïncidents, (de quantités, si petites soient-elles) qui « se touchent » comme deux objets quasi-matériels - donc ne se fait plus dans l'espace -, mais se fait, à ce même registre, en et par écart comme rien d'espace et de temps où, en quelque sorte, rien ne coïncide encore proprement avec soi. Même le concept de nombre s'en trouve modifié puisque, en Analyse non standard, pour tout nombre réel donné (et supposé absolument défini si l'on admet l'infini actuel, nous allons y venir), il existe une pluralité de nombres hyperréels infiniment proches de ce nombre et qui en constituent la « monade » ou le *halo*, et puisque, réciproquement, si un nombre hyperréel (limité) est donné, il est infiniment proche d'un et d'un seul nombre réel (il appartient à son halo), en sorte que tout nombre réel au sens classique (standard) est appelé *ombre* d'un hyperréel. Il va de soi, pour nous, que l'expression « infiniment proche » de l'Analyse non standard ne peut, sous peine de la manquer, désigner une proximité dans l'espace (un intervalle), ni même un voisinage au sens topologique, mais précisément ce que nous nommons ici l'*écart* comme rien d'espace et de temps, coextensif, mathématiquement, de l'équivalence. Il en résulte un certain flou sur le concept de nombre, dû, mathématiquement, au fait que pour une théorie formelle axiomatisée de l'arithmétique, il existe au moins un modèle non standard en plus du modèle standard dans lequel nous avons coutume de travailler. Les mêmes symboles peuvent prendre plusieurs significations. Par exemple, tous les infiniment petits sont les éléments hyperréels du halo de zéro (réel), autrement dit, zéro est lui-même un infinitésimal.

On peut encore étayer notre propos de la manière suivante, en méditant ce que Newton veut faire entendre quand il dit d'un mobile qui passe du mouvement au repos qu'il n'y a pas de « dernière vitesse » avant la limite (le repos). Cela signifie bien que l'infiniment petit ε est inassignable en tant que, d'une part, il n'est pas point, donc pas non plus assignable par un nombre, et que, d'autre part, s'il est quantité (aussi petite que l'on veut), lui assigner une quelconque quantité, si petite qu'elle soit, revient à le faire s'évanouir dans des quantités encore plus petites, par *répétition* à l'infini de l'opération de division. En termes mathématiques, on est sorti, s'il s'agit de quantité, du domaine archimédien (où $n\varepsilon > \varepsilon$) où le rapport des quantités est assignable. C'est dire, phénoménologiquement, que la répétition à l'infini (dénombrable) des opérations de division ouvre d'entrée, dans leur enchaînement aperçu d'un coup, à l'*horizon* de l'*écart* comme rien d'espace et de temps, lequel écart est bien l'infigurable de la *phantasia* « perceptive » de la quantité, où il y a, en et par cet écart, contact (mathématiquement : équivalence) avec la limite, et jamais coïncidence avec elle. Or, la répétition à l'infini n'est rien d'autre, pour nous, que le schème phénoménologique de la répétition se répétant qui « se produit » pour ainsi dire « dans » le radicalement infigurable de l'élément fondamental, comme ses condensations/dissipations qui jamais ne donnent lieu à de la coïncidence à soi c'est-à-dire comme répétition de l'infigurable que celle-ci emporte avec elle et qui, par conséquent, jamais ne donnent lieu à du nombre réel absolument défini ou à du point accompagné de sa diastase spatialisante. Tel est pour nous le « continu » phénoménologique, intraitable mathématiquement en lui-même, sinon aux limites, dans l'Analyse non standard : ce « continu » est infigurable, donc littéralement inintuitionnable, et il ne s'atteste phénoménologiquement, en mathématique, que par les contacts (avec lui et en lui) mis en jeu avec l'infinitésimal. C'est en ce sens que ce dernier a pour nous de l'importance. Et au fond, réflexion faite sur ce que nous avons entrepris ici, il est déjà attesté par le vieux problème de l'incommensurable, même si les mathématiciens ont mis tout leur art à le faire reculer.

Il reste donc à savoir s'il existe, en mathématique, de l'incommensurable pour ainsi dire radicalement inaccessible. Par là se pose la question elle aussi ancienne des quadratures, dont on sait aujourd'hui (depuis Liouville, Hermite et Lindemann au XIX^{e} siècle) qu'elle communique avec celle de l'existence des nombres transcendants. Mais nous allons voir que celle-ci suppose l'existence de l'infini actuel sous l'espèce du transfini non dénombrable, c'est-à-dire, comme le pensait Cantor, l'existence de Dieu. L'existence de π comme nombre déterminé (qui, on le sait, est transcendant) donnerait raison à Spinoza.

4.

Rappelons que l'union de l'ensemble des entiers naturels, de l'ensemble des nombres rationnels et de l'ensemble des nombres irrationnels algébriques (qui peuvent être racines d'une équation algébrique) est un ensemble infini dénombrable, un ensemble transfini en langage cantorien, dont le cardinal est désigné par $\aleph_0$. Bien entendu, en tant qu'ensemble infini, cet ensemble est équipotent à l'une ou l'autre de ses parties propres. Or il existe - ou l'on suppose qu'il existe - des nombres qui n'appartiennent pas à cet ensemble en tant qu'ils ne peuvent être racines d'aucune équation algébrique, et la démonstration de leur transcendance se fait, nous l'avons dit, par l'absurde : si on suppose tel ou tel nombre transcendant racine d'un polynôme algébrique, cela engendre une contradiction. C'est ce qu'a fait Liouville en 1844 en construisant un tel nombre, suivi de Hermite, en 1873, qui démontra de la sorte la transcendance de e, et de Lindemann, en 1882, qui suivit la même méthode pour démontrer la transcendante de π. Cependant, suite à Cantor, on utilise en général un procédé plus positif, celui du nombre diagonal (déjà transcendant) construit sur la suite supposée *complète* de *tous* les nombres algébriques (entiers naturels, rationnels, irrationnels algébriques) de cardinalité $\aleph_0$, c'est-à-dire en présupposant l'existence de l'infini actuel dénombrable ; et selon le célèbre théorème de Cantor disant que la puissance (le cardinal) de toutes les parties d'un ensemble est supérieure à la puissance de l'ensemble en question, on montre qu'en changeant (nécessairement) à l'infini l'ordre de l'énumération constituée des nombres algébriques, on change chaque fois le nombre diagonal, si bien que, si l'on peut construite un nombre diagonal, et de là une infinité de nombres diagonaux, non seulement ceux-ci sont transcendants, mais encore d'une puissance strictement supérieure à celle du dénombrable, c'est-à-dire, si l'on admet le théorème de Cantor, de puissance $2^{\aleph_0}$ qui, selon la conjecture cantorienne du continu, est égal à $\aleph_1$. Pour reprendre notre métaphore, l'ensemble des rationnels est plus « abondant » que l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des irrationnels algébriques est plus « abondant » que les deux premiers, alors que l'on reste toujours dans le dénombrable, et l'ensemble des transcendants, si c'en est un, est encore plus « abondant » que les trois premiers, si bien que l'on « sort » du registre du dénombrable. L'ensemble de tous ces nombres est appelé l'ensemble des nombres *réels*, et cette inépuisabilité à l'infini, concevable mais inimaginable, donne l'impression que l'ensemble ainsi uniformément dense des nombres réels suffit, moyennant l'axiome du continu, à « remplir » tout intervalle arbitrairement donné sur une droite - et absolument si l'on accorde crédit à la conjecture générale du continu formulée par Cantor ($\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$) - ; comme si, désormais, par cette extrême densification des points, ceux-ci, pourtant sans diastase spatialisante dans cette théorie, donc sans étendue « spatiale », pouvaient « se toucher », ce qui est évidemment inconcevable et inimaginable, une hyperdensification de points ne pouvant jamais donner de l'« espace ». En outre, le procédé diagonal ne permet pas de construire positivement tel ou tel nombre transcendant déterminé, même si la construction de Liouville, généralisée, en est peut-être comme l'amorce ou l'écho. Tout au plus le procédé diagonal démontre-t-il, moyennant conditions, l'existence des nombres transcendants en sorte que, la supposant établie, on puisse se contenter de montrer la transcendance de tel ou tel nombre, et par là son existence, en exhibant la contradiction que cela engendrerait de la supposer racine d'une équation algébrique. Autrement dit, au point où en est aujourd'hui la mathématique, les deux procédés ne se rejoignent pas. On *suppose* que π, e, et les quelques rares nombres transcendants que l'on connaît appartiennent à l'ensemble qui peut être construit par le procédé diagonal. Cela étant, on suppose au moins la hiérarchie de deux infinis *actuels*, ou que la détermination *absolue* de π et e (par exemple) n'est possible que par l'existence, pour ainsi dire, d'un infini actuel absolu, qui est Dieu lui-même ou la « substance » de Spinoza, la hiérarchie étant celle de ce que Spinoza appelle les « modes infinis », l'infini dénombrable, et l'infini non dénombrable des transcendants étant de tels modes. Cela revient à fixer l'incommensurable *comme tel*[1].

Peut-on dire que le problème ainsi posé est moins intraitable si, avec l'Analyse non standard, on pose les nombres hyperréels comme *halos* des nombres réels, ou, ce qui revient au même, si l'on pose les nombres réels comme étant chaque fois l'*ombre* d'un nombre hyperréel? Cela permettrait en tout cas de dire que le contact classiquement absurde de points infiniment proches d'un segment quelconque de la droite serait un contact en et par écart comme rien d'espace et de temps, car, en quelque sorte, *contact* de *halos* dans le « domaine » hyperréel, cet écart comptant pour rien dans le domaine des réels. Nous retrouverions ainsi le « continu phénoménologique » dont nous parlions, mais pour ainsi dire sous son « aspect intelligible » avec lequel la *phantasia* « perceptive » (non intentionnelle) de la quantité serait en incessant clignotement phénoménologique, dans l'enjambement de l'instantané. En termes spinozistes *transposés*, la divisibilité infinie des modes infinis de la substance (en elle-même infinie et indivisible) ne pourrait l'être que pour autant que, en tant qu'infinie, elle « pénètre » jusqu'à l'incommensurable, jusqu'à l'hyperdensité des nombres hyperréels, chacun dans son halo et en contact en et par écart comme rien d'espace et de temps avec tout hyperréel qui lui est infiniment proche, cet écart ne pouvant donc pas donner lieu à une mesure. Si cette divisibilité *actuelle* à l'infini du mode infini est, toujours en termes spinozistes, *intel-*

1. Notons que l'incommensurabilité demeure, quelle que soit la base, par exemple π ou e, prise pour la « représentation » des nombres. Dans cet exemple, elle joue pour ainsi dire à l'envers de ce que furent les moments historiques : c'est le dénombrable classique qui devient transcendant, accessible seulement par un saut.

lectuelle, et si par là elle est bien comme la trace de la substance dans le mode infini, du point de vue du mode lui-même, elle en est l'aspiration infinie (le *conatus*, et pour nous, l'affectivité la plus archaïque) à la substance, la division étant l'équivalent pour nous de la schématisation dont les concrétudes phénoménologiques sont *phantasiai* « perceptives » clignotant avec l'écart comme incommensurable, mais pouvant se transposer en imaginations d'intervalles entre nombres (et dès lors, entre points) - et la part infigurable de la *phantasia* « perceptive » pouvant corrélativement se transposer en incommensurable purement intellectuel (« lumineux » dans son « illumination »), purement extérieur à tout espace (spatialisation) et à tout temps (temporalisation). C'est un peu l'esprit de l'argument par lequel Cantor pense démontrer, sur la base de la transgression de l'axiome dit d'Archimède, l'inexistence de l'infiniment petit, en montrant qu'il ne peut faire partie intégrante d'une grandeur linéaire (i.e. intervalle) quelconque, donc qu'il en tombe en quelque sorte « au dehors », désignant ainsi ce que nous nommons l'écart.

Dans ce contexte, certes, on est contraint, en vue de la cohérence de la mathématique (mais sans tenir compte des paradoxes logiques qui viennent d'interdictions concernant les expressions en langue logique, en particulier les circularités qui n'ont mathématiquement rien de dirimant), d'admettre la détermination complète de π et de e, et en général, des nombres transcendants (que Spinoza ignorait tout à fait). Mais d'un point de vue phénoménologique, rien ne nous y contraint, d'autant moins que, mathématiquement, il existe plusieurs modèles pour une théorie axiomatisée de l'arithmétique, donc que, toujours mathématiquement, il n'y a pas de détermination (ou si l'on veut : de définition) absolue du nombre, et donc qu'il y a phénoménologiquement, dans tout nombre, fût-il entier naturel, *une part d'indétermination* (on parle au reste de nombres hypernaturels en Analyse non standard, cela, donc, dans un modèle non standard de l'arithmétique).

C'est, quant à nous, dans la critique phénoménologique, le parti que nous prendrons. Il se peut, par exemple, qu'il reste une part irréductible d'indétermination dans le rapport de la circonférence à son diamètre - donc que π soit finalement un « symbole » au sens fort, que π comme nombre déterminé n'existe pas ou tout au moins n'existe que comme relativement déterminé. En outre, comme nous avons latéralement fait allusion à Spinoza, nous nous devons d'ajouter que, dans notre conception de la phénoménologie, l'écart comme rien d'espace et de temps (l'écart comme incommensurable et comme non constitutif d'une quelconque unité de mesure) va de pair, dans notre transposition, avec l'infini actuel indivisible de Spinoza comme ce qui gît en son cœur infigurable, cependant transposé, en termes spinozistes, dans l'élément de l'intelligible - lequel est ici, en quelque sorte, l'élément qui supporte la lumière de l'intelligible mathématique. Pour nous cependant, cet écart l'est, le plus originairement, entre passé transcendantal (immémorial) et futur transcendantal (immature), eux-mêmes en écart entre passé transcendantal schématique et proto-ontologique, d'une part, et futur transcendantal schématique et proto-ontologique, d'autre part, ce qui marque l'écart entre le schématisme phénoménologique, qui n'a lieu ni dans le temps ni dans l'espace, et l'affectivité comme aspiration infinie (en termes spinozistes, comme *conatus*). Autrement dit, cet écart est pour nous radicalement originaire et est témoin de la « division » elle aussi radicalement originaire de l'archaïque et de l'éternel (la transcendance absolue et la transcendance absolue physico-cosmique), étant entendu que, contrairement à ce qu'à conçu Spinoza, il y a pour nous plusieurs « modes » de temporalisation de l'archaïque - que la « durée » telle qu'il l'entend, et qui est pour lui intellectuelle, est encore pour nous une abstraction métaphysique.

Cela nous amène à préciser brièvement que le « continu phénoménologique » dont nous parlons ne trouve concrètement (et architectoniquement) sa « place » que dans le contact intime, en et par écart comme rien d'espace et de temps, de soi avec soi, c'est-à-dire n'est rien d'autre que la « conscience de soi » à son registre le plus archaïque, ou l'intimité de cette dernière, son cœur, par rapport à laquelle tout point est déjà *radicale extériorité* - sa position ne pouvant avoir lieu qu'avec l'instant temporel et sa diastase spatialisante et temporalisante. C'est en ce sens que le contact de soi à soi en et par cet écart est indivisible et incommensurable (à savoir infini) et peut être architectoniquement as-*similé* à l'acte éternel de la substance spinoziste *en lui* - c'est aussi l'écart propre à l'enjambement de l'instantané dans le clignotement phénoménologique de la *phantasia* « perceptive » entre sa part figurable (en imagination) et sa part infigurable, ce qui donne son statut phénoménologique à l'incommensurable (et à la lumière de l'intelligible pur). C'est donc dans ce clignotement que ce dernier devient *phénomène* dont la part infigurable est, si l'on veut, et moyennant en tout cas une transposition architectonique, l'intelligible d'une « idée » flottant partout dans le flou qui entoure les nombres réels. En ce sens, c'est ce phénomène qui est véritablement, du point de vue strictement phénoménologique, « intuition » mathématique, d'une manière toute nouvelle (par modification en *phantasia* « perceptive » de tout intervalle, qu'il soit d'« espace » ou de « durée »), et non pas ce que les mathématiciens ont conçu, de manière finalement très naïve, comme « intuition » liée à la géométrie - ce pourquoi nous avons toujours mis ce terme entre guillemets phénoménologiques. L'« intuition » dont nous parlons suppose donc toujours un dedans (celui de l'intimité du noyau le plus intime de la « conscience de soi ») et un dehors radical (ici celui du point, et de la « continuité » redoublée, par là que ce point n'est pas concevable comme posé sans diastase), rendus homogènes par et depuis la diastase - et cela jusque dans la topologie la plus abstraite où la diastase trouve une expression mathématique, où la distinction du dedans et du dehors n'est jamais, à notre connaissance, radicalement mise en question. Cette « continuité phénoménologique » a été, dans l'intuitionnisme (Brouwer, Weyl), conçue à juste titre comme *devenir*, mais abusivement considérée comme celle de la durée ou du temps où s'effectueraient des « décisions », des actes ou des opérations successifs - il y manque en effet, à nos yeux, la médiation par la temporalisation en présence de langage, qui n'est pas temporalisation en présents d'actes, et dans cette dernière, l'enchaînement à l'infini des actes ou des opérations peut toujours déjà avoir eu lieu et toujours encore pouvoir avoir lieu, au gré du schématisme de la répétition se répétant, dont la trace symbolique la plus élémentaire est la suite des entiers naturels. Que cette transformation de la notion de « continu » et d'« intuition » puisse avoir des suites dans une sorte de « néo-intuitionnisme » mathématique, c'est une question que nous ne pouvons que laisser ouverte. Elle nous place en tout cas « aux limites » de l'espace (et du temps), au-delà desquelles il n'y a plus qu'un rien (qui compte classiquement pour rien), ce rien étant cependant « quelque chose », l'intimité la plus intime, qui n'est pas purement et simplement néant ni non plus purement et simplement être. C'est de ce « quelque chose » que l'infinitésimal tire toute sa fécondité et toute sa « puissance », sans se réduire à un pur et simple artéfact ou à une pure et simple fiction intermédiaire, utile pour les calculs. Ceux-ci n'en imposent finalement que pour les structures algébriques (dont nous n'avons pas parlé, et qui font la cohérence logico-mathématique des calculs en question) des ensembles de nombres qui sont chaque fois mis en jeu. Étrange leçon, jusqu'ici cachée, qui avec la profonde réforme de la mathématique ancienne, constitue sans doute l'un des principaux axes de la Révolution moderne.

Automne 2007

Indications bibliographiques

Exposés généraux :
J. T. Desanti, *La philosophie silencieuse*, Seuil, Paris, 1975 ; en particulier les exposés très précis et très clairs tirés de l'*Encyclopaedia Universalis*, « Fondements des mathématiques » (pp. 241-263) et « Infini mathématique » (pp. 264-283) publiés en Appendice.
J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1962.
N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1974.

Sur l'Analyse classique :
G. W. Leibniz, *Naissance du calcul différentiel*, Vrin, Paris, 1995.
I. Newton, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, Blanchard, Paris, 1994.
A. Cauchy, *Cours d'Analyse*, Imprimerie Royale, Paris, 1821.
J. Sebestik, *Logique et mathématique chez B. Bolzano*, Vrin, Paris, 1992.
P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Vrin, Paris, 1976.
G. Cantor, *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, G.

Olms, Hildesheim, 1966.
H. Weyl, *Le continu et autres écrits*, Vrin, Paris, 1994.

Sur les Apories de Zénon :
M. Caveing, *Zénon et le continu*, Vrin, Paris, 2002.

Sur Descartes et Spinoza :

J. Vuillemin, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, PUF, Paris, 1960.
M. Géroult, *Spinoza, Dieu*, Aubier, Paris, 1968, Appendice n° 9 sur la « Lettre XII à Louis Meyer » sur l'infini, pp. 500-528.

Sur l'Analyse non standard :
A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North Holland, Amsterdam, London, New York, 1974.
A. Pétry, « Balade en Analyse non standard sur les traces de A. Robinson », Institut supérieur Industriel Liégeois, sur Internet.
, « Les infinitésimaux en analyse non standard », sur Internet.
B. Gourévitch, « L'univers de Pi », sur Internet.
G. Philippe, « Théorème de Hermite (1873) établissant la transcendance de *e* », sur Internet.
C.S. Kleene, *Logique mathématique*, A. Colin, Paris, 1971.

Sur la phénoménologie :
M. Richir, *Fragments phénoménologiques sur le temps et l'espace*, Jérôme Millon, Coll. « Krisis », Grenoble, 2006.