83124

L'hérédité et les nombres

Pour une fondation transcendantale de l'arithmétique (à propos de Frege : *Die Grundlagen der Arithmetik* [1])

I. LE CADRE FRÉGÉEN PRÉALABLE

Comme on le sait, « attribuer un nombre », c'est, pour Frege, « énoncer une détermination objective *(etwas objectives)* d'un concept » (§ 106, 115), et « le nombre *apparaît (erscheint)* comme un objet *(Gegenstand)* reconnaissable *(wiedererkennbar)* » (116, nous soulignons). La détermination objective n'est pos-

1. Nous le citerons dans le corps de notre texte en suivant la pagination de l'édition originale, republiée, avec une traduction anglaise, par J.-L. Austin chez Basil Blackwell, Oxford, 1974. Nous modifions souvent la traduction française de Cl. Imbert (Seuil, Paris, 1969).

sible que si le nombre est reconnu comme objet, c'est-à-dire se constitue comme objet indépendant des conditions subjectives de la pensée dans la *reconnaissance,* à savoir dans une *réflexion abstractive.* En effet, « les propositions de recognition *(Wiedererkennungsätze)* sont nommées équations *(Gleichungen)* dans le cas des nombres » (116) : elles procèdent à une identification qui constitue le nombre comme objet, comme identité pouvant être identifiée à soi ou reconnue comme telle, mais cette reconnaissance n'est elle-même possible que si, dans son mouvement même, elle exhibe l'identité objective du nombre qu'elle reconnaît du même coup comme l'ayant toujours déjà précédée. C'est dire que, dans cette *circularité* qui la définit, la recognition est du même coup *transcendantale,* c'est-à-dire inséparable de l'objet sur lequel elle porte et qu'elle constitue comme objet – c'est une problématique très proche de celle de Fichte dans la première *Wissenschaftslehre* (W-L) de 1794/1795, ce pourquoi nous avons utilisé le terme fichtéen de « réflexion abstractive » qui apparaît dans l'écrit programmatique de 1794 intitulé *Über den Begriff der Wissenschaftslehre* (§ 7).

Les voies utilisées par Frege pour résoudre cette difficulté sont bien connues [1]. « L'attribution d'un nombre doit être saisie comme une identification *(Gleichung).* Il s'agit donc d'établir le sens d'une identification de nombre *(Zahlengleichung),* et de

1. Voir à cet égard : J. Vuillemin, *Sur le jugement de recognition chez Frege, Archiv fur Geschichte der Philosophie, 46,* 1964.

l'exprimer sans faire usage des noms de nombre ou du mot nombre » (116). Autrement dit, il s'agit d'éviter le *cercle* logique consistant à définir ce qui est à définir par le défini, ce qui n'est possible, pour Frege, que dans le cadre d'une logique extensionnelle, où la solution du problème est la suivante : « La possibilité d'ordonner biunivoquement les objets tombant sous le concept F et ceux tombant sous le concept G s'est avérée nous offrir le contenu d'un jugement de recognition des nombres. Notre définition devait donc poser que cette possibilité a la même signification qu'une identification numérique » (116). Il suffit donc que les concepts F et G se définissent par leurs extensions, à savoir, naïvement, par les objets qu'ils subsument ou qui tombent sous eux pour que, moyennant la possibilité d'établir une correspondance biunivoque entre les objets tombant sous F et les objets tombant sous G, on puisse dire que ces concepts sont *équinumériques,* c'est-à-dire *reconnaître* l'identité d'un même nombre (cardinal) comme constituant une détermination objective des concepts F et G. C'est donc dire que la reconnaissance ou la recognition du nombre est enveloppée dans la recognition de l'équinumericité, à savoir de la correspondance biunivoque entre les objets tombant sous F et les objets tombant sous G.

Plus précisément, ainsi que Frege l'explique au § 107 : « Quand a-t-on le droit de saisir un contenu (scil. de jugement) comme celui d'un jugement de recognition? Il faut pour cela que soit remplie la condition : que dans tout jugement, sans porter

atteinte à la vérité, le membre de gauche de l'identification considérée à titre d'hypothèse puisse être remplacé par le membre droit » (116-117). L'exigence proprement logique d'un jugement de recognition réside donc dans l'interchangeabilité des deux termes de l'identification sans que la vérité du jugement soit en rien modifiée : c'est la condition pour que l'identité désignée à droite de l'identification et l'identité désignée à gauche constituent la même identité, le même objet, qui, en tant que tel, est réciproquement constitué comme *cet* objet par l'identification même. Mais par là, nous ne sommes pas sortis de la circularité puisque nous ne savons encore rien du membre gauche et du membre droit de l'identification. C'est pourquoi, ainsi que nous l'anticipions, la solution de Frege est la suivante : « Si nous saisissons comme une identification la possibilité de mettre en correspondance biunivoque les objets tombant sous le concept F et les objets qui tombent sous le concept G, en tant que nous disons pour cela : " le nombre *(Anzahl)* qui revient au concept F est le même que le nombre qui revient au concept G ", et que, par là, nous introduisons l'expression " le nombre qui revient au concept F ", alors nous n'avons, pour l'identification, qu'un sens si les deux côtés ont la forme justement nommée. D'après une telle définition, nous ne pourrions pas juger si une identification est vraie ou fausse si seulement un côté avait cette forme. C'est ce qui nous a conduit à la définition suivante :

> Le nombre qui revient au concept F est l'extension du concept " concept équinumérique au concept F ", en tant que nous nommions un concept F équinumérique à un concept G s'il existe cette possibilité de la correspondance biunivoque » (117).

Reprenons de plus près ce mouvement où nous disposons du schéma de la doctrine frégéenne concernant le nombre cardinal – schéma dont on sait combien profondément il a imprégné toutes les tentatives logicistes de fondation de l'arithmétique. Selon ce mouvement, la définition du nombre passe nécessairement par la définition de l'équinumericité de deux concepts, laquelle suppose à son tour la possibilité de la mise en correspondance biunivoque entre les objets tombant sous F et les objets tombant sous G, puisque c'est seulement cette possibilité qui rend possible la recognition d'un caractère commun aux deux concepts, à savoir d'une détermination objective reconnaissable ou *identifiable* dans les deux concepts, ce qui, à son tour, rend possible le jugement de recognition portant sur le nombre en tant qu'objet identifié à soi dans une *Gleichung*.

Autrement dit, on se trouve ici en présence de deux processus d'abstraction ou d'un processus de double abstraction.

1) La simple mise en correspondance biunivoque entre les objets tombant sous F et les objets tombant sous G, indépendamment de leur constitution particulière et de l'ordre dans lequel ils se présentent, ce

qui évoque la définition cantorienne de la puissance d'un ensemble. La difficulté est qu'il faut présupposer les extensions de concepts, c'est-à-dire ce fait que les classes d'objets subsumés par F ou G soient toujours déjà constituées comme classes d'*individus* toujours déjà déterminés – comme si les concepts permettaient d'effectuer des découpages déterminés dans un domaine toujours déjà constitué d'individus, donc comme si penser revenait à découper arbitrairement, en toute liberté et souveraineté, des classes d'individus déjà reconnaissables comme tels. Nous verrons que cette difficulté joue un rôle essentiel dans l'engendrement de la suite N des entiers naturels : nous la désignerons par l'expression : *problème de l'individuation.* Quoi qu'il en soit, cette déterminité a priori de l'extension d'un concept F permet d'effectuer une *première abstraction,* celle de *la classe des concepts équinumériques* au concept F par la médiation de la mise en correspondance biunivoque : on passe en effet de l'extension d'un concept comme *classe des objets* tombant sous ce concept à la *classe des concepts* équinumériques à ce concept.

2) La *seconde abstraction* consiste en la constitution *du* concept « concept équinumérique au concept F », et en la réflexion corrélative de son extension comme telle, laquelle est assimilée par Frege au nombre (cardinal) qui revient au concept F, le nombre étant le caractère ou la détermination objective caractérisant d'un seul nom *la* classe des concepts équinumériques au concept F. On passe donc, par là, de *la* classe des concepts à la déterminité objective

de cette classe, qui n'est rien d'autre que l'extension réfléchie ou reconnue comme telle dans l'abstraction de tous les concepts – ou de tout concept quel qu'il soit – appartenant à cette classe, par où les objets de cette extension ne sont plus pris que comme de purs et simples individus. De la sorte, par conséquent, le nombre qui revient au concept F, en tant qu'identité objective, c'est-à-dire aussi en tant qu'individu reconnaissable, s'identifie à soi dans la recognition comme caractérisant univoquement la classe des concepts équinumériques au concept F : il est ainsi une sorte de concept de concept puisqu'il permet de découper, parmi tous les concepts possibles, une classe de concepts – et cela ne va pas, on le sait, sans soulever des difficultés logiques, des paradoxes, que nous examinerons en un autre lieu. Retenons que le nombre est à la fois, d'après cette définition, un objet, un *individu* et un *concept* de concepts, qui permet de découper une certaine classe déterminée de concepts pris eux-mêmes, dans ce découpage, comme des individus, ce qui pose à nouveau le problème de l'individuation des concepts, et d'une individuation différenciée selon qu'il s'agit de purs et simples objets atomiques (généralement désignés comme sensibles ou empiriques) ou d'objets plus complexes comme les concepts ou les concepts de concepts (nombres).

Nul doute que cette « construction » frégéenne soit belle, et même impressionnante : le concept de nombre se trouve enveloppé dans l'équinumericité entre deux concepts, laquelle est censée se réduire

à des rapports purement logiques (la correspondance biunivoque) (§ 108, 118) entre objets. Mais cela paraît justement comme une construction dans la mesure où subsiste toujours la question de savoir comment, à partir d'elle, peut s'engendrer la *suite* des entiers naturels, ce qui nécessite *quelque chose de plus* que cette définition du nombre (cardinal) puisqu'il y va de l'*individuation itérative* des nombres, et non plus de la reconnaissance d'un nombre quelconque revenant à un concept F quelconque – techniquement se pose la question de l'articulation et du recroisement entre l'ordinalité et la cardinalité.

Comme nous allons nous efforcer de le montrer, il entre, dans ce « quelque chose de plus », de quoi nous ménager un accès à une « déduction transcendantale » de la suite des nombres naturels, et de là, au schématisme transcendantal des catégories de la quantité. Car, ainsi que nous allons le voir, ce fut le génie de Frege de remettre implicitement en cause ses propres conceptions logicistes, les cadres de sa construction, pour se donner la possibilité d'engendrer la suite N, et cela, malgré les difficultés logiques inextricables – qu'il reconnut dans les *Grundgesetze der Arithmetik* – que cette remise en cause devait lui opposer, et qui eussent pu le contraindre à renoncer.

Pour engendrer la suite des entiers naturels, ou comme il la nomme, la « suite naturelle des nombres », Frege indique au § 108 (118) qu'il faut quatre définitions :

1) le zéro;

2) n suit immédiatement m dans la suite naturelle des nombres;

3) le nombre 1;

4) 1 suit immédiatement 0 dans la suite naturelle des nombres.

Ces quatre points font l'objet des §§ 69 à 78. Nous allons les étudier pour l'essentiel, de manière critique, afin d'en dégager, à travers le problème de l'individuation, l'élément de logique transcendantale qui nous intéresse, à savoir une approche transcendantale du schématisme transcendantal de la quantité.

II. 0, 1 ET LE CONCEPT DE SUCCESSION DANS LA SUITE – Φ

a) *Le nombre* 0

Au § 69, Frege explique que l'identité des nombres qui appartiennent aux concepts F et G signifie l'identité des extensions des concepts « équinumérique au concept F » et « équinumérique au concept G », ce qui signifie que le nombre se reconnaît, se réfléchit ou s'identifie par la recognition, la réflexion ou l'identification objective des *extensions comme telles* de ces concepts F et G, lesquelles sont donc abstraites de F et G par la constitution des concepts « équinumérique au concept F » et « équinumérique au concept G », cette abstraction rendant possible leur identification comme identifica-

tion objectivante de la même extension et du même nombre.

Aux §§ 70-73, Frege définit la correspondance biunivoque par l'intermédiaire d'une relation φ purement logique entre objets tombant sous F et objets tombant sous G et, de là, généralise le concept d'équinumericité (§ 73), par la médiation d'un concept H intermédiaire nécessaire pour réfléchir les concepts « équinumérique au concept F » et « équinumérique au concept G ».

La rigueur logique étant ainsi acquise, c'est au § 74, où se donne la définition du zéro, que la « tonalité » du texte frégéen commence à changer :

« Puisque rien ne tombe sous le concept " non-identique à soi-même ", je définis :

0 est le nombre qui revient au concept " non-identique à soi-même " (87). »

Frege poursuit aussitôt en justifiant l'introduction du concept « non-identique à soi-même » par le fait qu'un tel concept implique contradiction (quel que soit l'objet choisi, on sait qu'il ne tombe pas sous un tel concept), ce qui suppose (87-88) que :

> a tombe sous le concept « non-identique à soi-même » veuille dire la même chose que « a n'est pas identique à soi-même », ou « a n'est pas identique à a ».

Le concept « non-identique à soi-même » est donc un concept dont l'extension est constituée par tout objet non-identique à soi-même. Or, et tel est le présupposé de tout ceci, comme il n'y a *aucun objet,* aucun individu, à savoir aucune identité, qui soit

non-identique à soi-même, rien, c'est-à-dire en fait *rien d'identique* ne tombe sous ce concept dont l'extension est vide, et dont le nombre 0 est la détermination objective. Mais pour tirer celle-ci, il faut établir, ce que fait Frege au § 75, que tous les concepts – ou tout concept – contradictoires sont équinumériques au concept « non-identique à soi-même » (« tout concept sous lequel rien ne tombe est équinumérique à tout autre concept sous lequel rien ne tombe, et seulement à un tel concept » : 88), ce qui permet d'*identifier à soi comme objet l'extension vide,* donc le nombre 0 comme revenant à tout concept équinumérique au concept « non-identique à soi-même », ou comme caractère objectif de l'absence d'objet tombant sous un concept.

Ce qui est capital ici, et sur quoi nous allons longuement méditer, c'est que le *Rien,* le vide, l'*absence* d'objet pour un concept intervient d'une manière *constitutive,* c'est-à-dire, en un sens, de manière *transcendantale.* Est désignée explicitement *la non-identité à soi d'un objet,* donc aussi *la non-identité à soi d'une identité (à soi).* Cette non-identité à soi caractérisant le vide ou le Rien est elle-même identifiée à soi comme *le Rien* ou le vide d'une extension dont le concept est le nombre zéro en tant que concept découpant, dans le domaine de tous les concepts possibles, les concepts dont l'extension est vide – par où le nombre zéro *devient* lui-même un *individu* identique à soi. Comme cette articulation vraiment fondatrice reviendra dans le concept de successivité (§ 76) et dans la définition du nombre 1 (§ 77), nous

l'étudierons plus avant en poursuivant la lecture. Retenons qu'avec le zéro, *le Rien,* pourtant *néant d'objet* ou *néant d'identité, devient,* c'est-à-dire *se constitue* comme *un objet* ou *une identité à soi,* au cours d'un mouvement de pensée extrêmement subtil.

b) *Le concept de successivité de deux membres voisins dans la suite naturelle des nombres*

Étudions de près l'importante définition du § 76 (89-90) pour tenter d'en dégager quelque chose comme une signification transcendantale. Cette définition pose qu'il y a un *concept F* et un *objet x* tombant sous F ayant *du même coup* deux caractéristiques : 1) le nombre qui revient au concept F est n, c'est-à-dire l'extension du concept « équinumérique au concept F » est n, ce qui implique, quant à cette extension, qu'il y a *un objet* en elle qui est en correspondance biunivoque avec l'objet x tombant sous F; 2) le nombre qui revient au concept « tombant sous F mais non-identique à x » est m, c'est-à-dire l'extension du concept « équinumérique au concept " tombant sous F mais non-identique à x " » est m, ce qui signifie que m est intuitivement l'extension du concept « équinumérique au concept dont on a défini l'extension en ôtant l'objet x de l'extension de F », puisque, sous le concept « tombant sous F mais non-identique à x » sont subsumés tous les objets de l'extension de F qui ne sont pas identiques à x, ce qui sous-entend à son tour que tous les objets tombant sous F soient préalablement reconnaissables, distinguables, à savoir *individués.*

Ainsi qu'on le voit, toute la difficulté de la définition vient de ce qu'il faut penser ses deux moments ensemble, d'un seul et même *mouvement.* Ce n'est qu'alors que l'on peut comprendre que cette définition est équivalente à « n suit immédiatement m dans la suite naturelle des nombres », donc à une *mise en ordre* des cardinaux déjà définis dans le cadre frégéen. En ce sens, il y a une profonde parenté entre cette définition et la méthode suivie bien plus tard (1904, 1908) par Zermelo pour établir son théorème sur le bon ordre : dans tous les objets qui tombent sous F, *il y a au moins un objet* x, sorte d'« élément distingué » au sens de Zermelo, tel qu'aucun de ces objets ne soit identique à x, ou tel que tous ces objets en soient différents. C'est dire que la définition proposée par Frege fait intervenir autre chose que le jugement de recognition par identification, à savoir *la non-identité de* x à l'égard de *tous* les *autres* objets tombant sous F (ou la *non-identité à* x de tous les autres objets). Or cette non-identité d'un objet à un autre objet fait intervenir à la fois l'identité de x (comme objet) et des autres objets, c'est-à-dire leur *identification* ou leur *individuation,* et la non-identité de x aux autres objets (et réciproquement), à savoir leur *différence,* elle-même rendue possible par leur individuation.

Il y a donc dans le concept de successivité le jeu d'une *différence* entre *identités* ou *individus.* Mais il y a plus encore : il y a que le nombre m, précédant immédiatement le nombre n, est constitué à partir du nombre n, immédiatement suivant, à partir du

concept F et de son « élément distingué », c'est-à-dire est constitué *rétroactivement* par la distinction, donc en un sens par l'individuation de l'objet x. Expliquons-nous sur ce point tout à fait capital. Toute la définition est suspendue à l'expression « il y a un concept F et un objet x », ce qui veut dire que c'est *depuis* F que l'on peut distinguer un objet x, et que c'est à partir de cet objet x et du concept F que l'on peut construire le concept « tombant sous F (déjà donné ou défini) mais non-identique à x » (déjà défini comme « élément distingué »). C'est donc bien à partir de F et de x (et donc de n) qu'on peut *réfléchir* le concept auquel revient le nombre m (précédant immédiatement n), et par là, identifier le nombre m comme *précédant* immédiatement le nombre n. A cet égard, la remarque par laquelle Frege achève le § 76 est importante. Il nous y explique qu'il ne peut encore dire de n qu'il est *le* nombre succédant à m de manière immédiate, puisque la justification de l'article défini implique deux choses (note 1, p. 87) : que l'on possède, tout d'abord, le concept de successeur, et que l'on montre que n est bien un nombre succédant à m; que l'on montre, ensuite, que ce nombre est le seul qui succède à m. Or, justement, ici, on ne définit que la succession en général, et n comme succédant à m seulement à partir de F et de x, comme à partir d'un lieu de pensée qui est là comme lieu de réflexion permettant de *réfléchir le concept* « tombant sous F mais non-identique à x » *à partir de l'identité du concept* F *et de l'objet* x (pouvant être arbitrairement

choisis : ceci n'introduit qu'un ordre parmi les nombres, pas encore un bon ordre). Autrement dit, c'est cette identité qui permet de *définir rétroactivement* les expressions « tombant sous F » et « non-identique à x », sans pour autant que cette identité soit déjà *identifiée à soi,* puisque, si n est un objet revenant au concept F, m + 1 (= n) ne l'est pas encore (n n'est pas encore le successeur de m), en tant que n demeure arbitraire ou quelconque : tout ce que nous livre en réalité la définition, c'est la possibilité de réfléchir ou de constituer rétroactivement un élément précédant de la suite par le moyen d'un élément suivant – et par convention, un élément précédant immédiatement le suivant dans la suite.

Autrement dit encore, il y a dans la définition frégéenne une irréductible *circularité* – qui, d'ailleurs, nous allons nous efforcer de le montrer, gît dans les assises mêmes des *Fondements* – qu'il nous faut pourtant penser car tout s'y tient, ou se tient dans son mouvement même. On est renvoyé de F, de n et de x au concept dont m constitue l'extension objective et réciproquement. Si l'on considère attentivement le tout de la définition, on s'aperçoit que ce que nous avons nommé la réflexion ou la définition rétroactive *constitue d'un seul coup* m *et* n puisqu'il faut se donner F et x pour obtenir m, mais que, du même coup, ce n'est que si nous nous donnons m qu'il y a F et x, ou mieux, puisque ce sont les définitions de F et de x qui servent à caractériser n et m, n par l'extension du concept « équinumé-

rique au concept F dont l'extension contient x » et m par l'extension du concept « équinumérique au concept F dont l'extension ne contient pas x », x devant être *choisi*, distingué, identifié ou *individué* de manière telle qu'il puisse alternativement *appartenir* et *ne pas appartenir* à l'extension du concept F, c'est-à-dire à la même extension dont l'identification objectivante nous fournit, dans la même alternative, respectivement les nombres n et m. Il vient donc que ce que nous avons désigné tout à l'heure comme *lieu de réflexion* est en réalité le lieu indéterminé qui tient d'une seule vue les deux branches de l'alternative, c'est-à-dire le lieu où se réfléchissent réciproquement *dans leur différence* (donc leur non-identité respective) l'appartenance *et* la non-appartenance de x à l'extension de F, les nombres n et m comme les extensions objectives du concept F subsumant x et du concept F ne subsumant pas x.

Tout tient donc en ceci que la définition présuppose en fait tacitement un *jugement de recognition par l'identification à soi de l'objet (l'identité)* x, *unique* – ce qui constitue un cercle, mais pas *ipso facto* un cercle vicieux puisqu'un objet unique n'a, selon les définitions frégéennes, rien à voir, du moins *a priori* ou immédiatement, avec le nombre 1 –, pour introduire, par rapport à cette identité identifiée à soi, une *différence*, puisque, dans le premier cas (n), x tombe sous F et que dans le second (m), x *ne* tombe *pas* sous F. Quoi qu'il en soit, par conséquent, de l'extrême astuce avec laquelle Frege évite le cercle vicieux, on peut néanmoins dire que l'*unicité* d'un

objet identifié à soi joue dans la définition comme *unicité* qu'on *ajoute* ou qu'on *retranche* de l'extension d'un concept – ce qui est tout à fait clair si l'on se rappelle que n constitue l'extension du concept « équinumérique au concept F (dont l'extension contient x) » et m l'extension du concept « équinumérique au concept F dont l'extension ne contient pas x ». C'est le double jeu de la présence et de l'absence de cette unicité dans l'extension du concept F qui permet de définir d'un seul coup n et m comme deux nombres se suivant *immédiatement*. Ou encore, c'est le jeu de *l'identité à soi* de x et de la *non-identité à* x de tout autre objet, bref le jeu du Même et de l'Autre, ou mieux le jeu entre la présence et l'absence (à la pensée), le battement en éclipses ou *le clignotement d'une même extension* – l'extension du concept F – *entre l'identité à soi* constitutive du nombre n *et la non-identité à soi*, dès lors que l'on en ôte *un* objet, ouvrant à la constitution du nombre m, manière de dire, encore une fois, que tout tient à l'*individuation* de l'objet x – en termes techniques : au choix de l'objet x comme « élément distingué ».

Il y a donc, pour nous, un *processus d'individuation transcendantale* au fondement ou comme la possibilité a priori du concept de successivité dans une suite, et ce, dans ce qui permet de refermer aussitôt sur une identité à soi (celle du nombre m) la non-identité à soi de l'extension du concept F. Où plutôt, il y a un *processus d'individuation transcendantale en chaîne*, puisqu'il y a un *rapport intime entre l'indivi-*

duation de l'objet x *et l'individuation des nombres* m *et* n (n par le fait que désormais, il suit immédiatement m dans la suite N, au lieu d'être un nombre arbitraire). C'est ce que nous allons retrouver de manière encore plus précise dans la définition du nombre 1 qui constitue l'objet du § 77.

c) *La définition du nombre 1 (§ 77)*

Frege se propose tout d'abord de montrer qu'il y a quelque chose *(etwas)* qui succède immédiatement à 0 dans la suite naturelle des nombres. Pour cela, il examine le concept « identique à 0 » (0 étant le nombre qui revient au concept « non-identique à soi-même »). Manifestement, 0 tombe sous le concept « identique à 0 », mais rien ne tombe sous le concept « identique à 0 mais non-identique à 0 », ce qui signifie que 0 revient à ce dernier concept en tant que nombre cardinal, puisque ce concept n'est rien d'autre qu'une expression du concept « non-identique à soi-même », appliquée à l'objet 0. Par là-même, on dispose de deux éléments qui peuvent se rapporter à la définition du § 76 : 1) un concept « identique à 0 », défini par la médiation de 0, c'est-à-dire par la médiation de l'identification à soi de l'extension vide, à savoir de l'extension du concept « non-identique à soi-même » qui s'objective elle-même en l'objet 0 par l'abstraction réfléchissante en laquelle elle s'identifie à soi : le concept « identique à 0 » procède donc de l'identité à cet objet – cette extension – identifié à soi. 2) Mais du

même coup, et c'est là que s'amorce la circularité de la définition du § 76, cet objet, le zéro, est réfléchi une *seconde fois* comme tombant sous le concept « identique à 0 », à savoir en tant qu'identique à cette identité à soi de l'extension vide. Dès lors, la définition du § 76 peut s'appliquer puisqu'il y a un concept F (« identique à 0 ») et un objet x (« 0 ») tombant sous lui tels que le nombre qui revient au concept F est 1 et que le nombre qui revient au concept « tombant sous F (" identique à 0 ") et non-identique à 0 » est 0, ce qui signifie que 1 suit immédiatement 0 dans la suite naturelle des nombres. En effet : 1) tomber sous le concept « identique à 0 », c'est, d'après ce qui a été dit, être identique à 0 (c'est l'objet 0 qui tombe sous ce concept, à savoir : l'objet 0 tombe sous le concept tel que tout *objet de son extension* est *identique* à *l'extension vide identifiée à soi,* par où l'extension de ce concept n'est pas vide, mais ne contient, intuitivement, qu'un seul objet); 2) être non-identique à 0 implique, dans le cas de la définition appliquée ici, que 0 soit l'extension du concept « être identique à 0 et non-identique à 0 » comme cas particulier du concept « non-identique à soi-même », par où la définition permet d'*identifier* ou d'*individuer le zéro comme l'extension du concept* F et *le un comme le nombre revenant à ce même concept* F.

Efforçons-nous d'approfondir ce mouvement. L'individuation de 0 et de 1 comme éléments se suivant immédiatement dans la suite naturelle des nombres passe par l'identification du concept F en

tant que concept « identique à 0 », et de l'extension de ce concept F en tant que ne comprenant que des objets identiques à 0. Car c'est par là qu'il est possible d'identifier à soi l'extension du concept F et donc de constituer le nombre 1 – de l'*individuer* – comme cette extension même réfléchie en tant qu'objet identique à soi, alors même que rien ne tombe sinon le 0, c'est-à-dire l'extension vide identifiée à soi (et donc objectivée), dans cette extension; à son tour, cette extension vide se reconnaît, donc s'identifie ou s'*individue,* mais rétrospectivement ou *rétroactivement* comme l'extension du concept « identique à 0 et non-identique à 0 », lequel se reconnaît, c'est-à-dire s'individue tout aussi rétroactivement comme cas *particulier (individué)* du concept « non-identique à soi-même ». Autrement dit, quand Frege dit qu'il y a un concept F (« identique à 0 ») et un objet x (« 0 »), il ne considère *pas encore* le concept F et le nombre qui lui revient comme appartenant à la suite N : dans la définition du zéro, nous n'avons encore qu'un cas particulier parmi d'autres possibles de la définition générale du nombre *cardinal* – le zéro n'est pas encore inclus dans une suite ou une relation d'ordre, car cette inclusion n'a lieu qu'à partir de la définition du nombre 1, ou *depuis cette définition* qui, c'est remarquable, et c'était d'ailleurs la seule possibilité d'échapper au cercle logique consistant à définir le 1 par l'unité, ne consiste qu'à définir 1 en tant que suivant immédiatement 0 dans la suite N. C'est seulement *après* cette définition *rétroactive* définissant le 0 comme précédant immé-

diatement 1 (donc corrélativement : le 1 comme suivant immédiatement 0) que Frege peut effectuer, à propos de 1 et de 0, les jugements suivants, qui sonnent dans son texte de manière assez paradoxale :

> « Le nombre qui revient au concept " identique à 0 " est *identique* au nombre qui revient au concept " identique à 0 ";
> « Le nombre qui revient au concept " identique à 0 mais non-identique à 0 " est 0. » (90, nous soulignons.)

Notons que seule la première proposition constitue un jugement de recognition, ce qui est naturel puisque ce jugement a déjà été effectué à propos de 0 et qu'il ne s'agit ici que de le reconnaître, non pas en tant que nombre en général, mais en tant que nombre *précédant* immédiatement le nombre 1, par où il vient, ce qui est très important pour notre propos, que l'*individuation dans la suite – l'individuation quantitative – ne s'effectue pas par un jugement de recognition,* lequel ne peut porter, pour ainsi dire, que sur une individuation qualitative, c'est-à-dire sur une individuation constituant un x quelconque comme identique à soi – c'est par là que le nombre cardinal se constitue comme un objet, mais un objet quelconque, différent d'un autre objet lui aussi quelconque. Par suite, il est normal que 1 en tant que succédant immédiatement à 0 ne puisse se reconnaître comme objet ou comme nombre *cardinal* que dans un jugement de recognition : ce que constitue

la définition du § 76, c'est l'individuation de *deux* nombres comme se suivant immédiatement, c'est-à-dire techniquement, de deux nombres dans leur *ordinalité* ou leur relation d'ordre.

C'est donc par là seulement que Frege peut poursuivre, tout d'abord en reconnaissant en ceci un cas particulier de la définition du § 76, ensuite en écrivant :

> « Si nous posons *par définition :*
> 1 est le nombre qui revient au concept " identique à 0 ", nous pouvons exprimer la dernière proposition comme suit :
> 1 succède immédiatement à 0 dans la suite naturelle des nombres. » (90, nous soulignons.)

Reprenons encore une fois tout ce mouvement en essayant d'y articuler ce que nous entrevoyons comme un élément de logique *transcendantale.* Si nous y regardons de plus près, et si pour simplifier, nous nommons « identité à soi » le concept « identique à soi-même », « non-identité à soi » le concept « non-identique à soi-même », etc., il vient tout d'abord ceci : dans le concept même de successivité ou de successeur (n succède immédiatement à m) jouent comme en un double jeu réciproque l'identité à soi et la non-identité à soi, chaque fois de l'identité constituée en tant qu'objet, mais avec ceci de particulier, chez Frege – c'est là sans doute l'une des marques de son génie – que la non-identité à soi est elle-même prise en compte pour définir le zéro, à savoir pour dire qu'aucun objet, donc *aucune*

identité ne tombe sous le concept « non-identique à soi-même », comme si donc le jeu de l'identité à soi et de la non-identité à soi qui articule la définition du zéro se répercutait dans l'articulation de la définition donnant la successivité. Car *il n'y a d'identité,* d'objet, nous le comprenons à présent, qu'*identique à soi.* Par où il vient que, corrélativement, il ne peut y avoir de non-identité à soi que comme identique, c'est-à-dire comme identité à soi : la non-identité à soi n'existe comme telle que dans sa recognition, sa réflexion ou sa reconnaissance qui l'objective en tant que non-identité à soi identique à soi, donc dans *l'identité à soi de la non-identité à soi,* qui seule permet de constituer le concept, à savoir aussi l'identité du « non-identique à soi ». C'est dire que la non-identité à soi est aussi constituée *rétroactivement,* depuis l'identité, donc l'identité à soi, qu'elle n'est convoquée que pour être aussitôt révoquée dans la définition du 0, qui est le nombre du non-identique à soi en tant qu'identique à soi.

d) *Le concept de succession dans la suite - φ*

Il s'agit de démontrer que *tout nombre* cardinal n a un cardinal qui lui succède immédiatement dans la suite naturelle des nombres. Pour cela, il faut indiquer un concept qui revient à ce « successeur ». Frege le désigne commodément par le concept *« appartenant à la suite naturelle des nombres finissant avec n »* (§ 78, 92), et il l'explique par une définition

de la succession dans une suite - φ qu'il emprunte à sa *Begriffschrift* tout en la modifiant légèrement :

« "y succède à x dans la suite - φ " ou " x précède y dans la suite - φ " peuvent être expliqués par l'expression suivante, qui signifie la même chose :

« Si tout objet avec lequel x a la relation φ tombe sous le concept F, et si, de ce que d tombe sous le concept F, il résulte, en général, quel que soit d, que tout objet avec lequel d a la relation φ tombe sous le concept F, alors y tombe sous le concept F, quel que soit aussi le concept F » (92).

C'est de cette définition, fort abstraite, que Dedekind dit, dans sa célèbre lettre à Keferstein du 27 février 1890, qu'elle coïncide pour l'essentiel avec son concept de chaîne – dont on sait qu'il permet de dériver et définir la suite N. Frege explique au § 81 que la φ-suite peut être, *par exemple,* la suite naturelle des nombres, ce qui implique que la φ-suite en est une généralisation. Au § 80, il explique aussi que, par cette définition, on peut conclure que, si b suit a et si c suit b dans la φ-suite, alors c suit a sans que l'on ait à connaître les termes intermédiaires de la φ-suite, ce qui veut dire que la relation φ est une relation d'ordre. Il ajoute encore, au § 80, que cette définition de la succession dans une suite permet de réduire aux lois logiques générales l'inférence de n à n + 1 qui pourrait sembler propre aux mathématiques. Enfin, dans le § 107, où il résume l'esprit de sa démarche, Frege précise que cette définition donne le concept de succession d'un objet y à un objet x dans une φ-suite générale, et

que, par elle on est ramené à des rapports *purement logiques.*

Réécrivons la définition des *Grundlagen* sous forme développée, en tenant compte des acquis de la *Begriffschrift* [1].

Si, des *deux propositions :*

a) tout objet avec lequel x (sous-entendu : ayant la propriété F) a la relation φ tombe sous le concept F (c'est-à-dire : tout résultat d'une application φ à x a la propriété F),

b) si d tombe sous le concept F, alors, quel que soit d, tout objet avec lequel d a la relation φ tombe sous le concept F (à savoir : si « d a la propriété F » implique que, quel que soit d, tout résultat de l'application φ à d a la propriété F, donc la propriété F se transmet héréditairement dans la suite φ), mais cela, *aussi quel que soit le concept* F (c'est-à-dire : la quantification universelle porte sur tout concept F caractérisant un terme quelconque de la suite φ; donc intuitivement : l'hérédité dans la suite φ n'est caractérisée univoquement que si toutes les propriétés d'un terme quelconque de la suite se transmettent héréditairement),

il résulte que : y tombe sous le concept F (quel que soit F caractérisant les membres de la suite),

alors on dit que : y succède à x dans la suite φ, ou x précède y dans la suite φ.

On se trouve donc en présence des termes sui-

1. §§ 23, 25, 26. Nous suivons la réédition par I. Angelelli chez Georg Olms, Hildesheim, New York, 1977.

vants : l'objet x, la relation φ, le concept F, l'objet y, les objets d tombant sous F, et les concepts F se transmettant héréditairement dans la suite φ, avec lesquels on procède à une quantification universelle portant sur toute la définition, comme cela apparaît clairement dans l'écriture idéographique.

Tentons de l'expliquer terme à terme. La *première proposition,* « tout objet avec lequel x a la relation φ tombe sous le concept F », signifie : tout résultat de l'application φ à x a la propriété F, sans que ce résultat soit encore précisé comme étant l'objet y. Avoir la relation φ avec x veut dire se trouver dans la relation de succession avec x moyennant l'ordre mis par φ, c'est-à-dire succéder à x dans la suite φ. Mais cette relation n'est pas encore spécifiée comme relation de succession *héréditaire :* la première proposition dit simplement que si x tombe sous F, alors *tout* objet ayant la relation φ avec x tombe sous F. C'est dire qu'à ce stade, il ne s'agit encore que d'*un* concept F, et que la relation φ ne constitue pas encore *une* image φ(x) de l'objet x. On prend simplement un concept F, défini en extension et *un* objet x de cette extension, objet qui joue donc le rôle d'élément distingué – ce qui rappelle la définition du § 76 – qu'il s'agit de choisir ou d'individuer comme *un* objet *quelconque* qui tombe sous le concept F. Ce n'est pas qu'avec la *seconde proposition* que la relation φ est précisée comme *relation héréditaire* en tant que toute propriété, tout concept F sous lequel tombe un objet d quelconque se transmet héréditairement selon la relation φ quel que

soit l'objet d choisi ou individué. C'est ici que nous avons affaire à une définition *circulaire,* c'est-à-dire donnant tout juste ce qu'il faut pour la définition. Il faut en effet présupposer un ensemble déjà constitué d'objets d, caractérisés chacun par le fait qu'ils tombent sous les concepts F_1, F_2, ..., F_n, pour que l'on puisse définir une relation φ entre eux transmettant ces mêmes propriétés héréditairement, ou plutôt, définir l'ensemble ou la classe des d revient à définir la succession φ héréditaire et réciproquement; ou mieux encore la définition de l'un ne va pas sans la définition de l'autre – même si, du point de vue opératoire, la définition globale est satisfaisante puisque nous disposons d'un critère permettant de retenir les objets qui y satisfont et d'éliminer ceux qui n'y satisfont pas. Il s'agit donc, ici encore, non pas d'une simple recognition logique, comme dans le cas des cardinaux, mais d'une *réflexion transcendantale,* consistant à se donner au départ juste ce qu'il faut pour y *reconnaître,* a posteriori, précisément la définition que l'on recherchait.

Réfléchissons davantage sur cette seconde proposition, c'est-à-dire sur la définition de la transmission héréditaire d'une classe de propriétés F_i, selon une relation d'hérédité φ. Ainsi qu'on l'a souvent remarqué [1], la définition frégéenne permet d'éviter l'expression embarrassante « et ainsi de suite » ou « etc. ». Ce qui doit éveiller notre atten-

1. Voir par exemple W. et M. Kneale, *The development of logic,* Clarendon Press Oxford, 6e éd., 1978, pp. 468-469.

tion, car il se pourrait bien que cette « indéfinité » de la suite φ soit dissimulée, dans la définition de Frege, par une sorte d'artifice de langage. Et en effet, toute sa difficulté vient du fait que l'on fait *comme si,* par la quantification universelle sur l'objet d ainsi que par la quantification universelle sur le concept F, on disposait d'avance de la totalité déterminée de la suite φ, alors qu'en réalité, nous le savons, nous n'en disposons jamais, si du moins la suite est infinie, comme c'est le cas pour la suite N. On procède donc *comme si,* dans le cas de la suite N, on connaissait d'avance toutes les propriétés des nombres – ce qui est impossible, ainsi que Skolem l'a rigoureusement montré en 1933 et 1934 – et tous les nombres naturels, ce qui ne se peut à moins de se donner un procédé pour leur construction qui les présuppose toujours déjà. Si donc nous disposons d'un critère logique formel pour nous donner tout élément quelconque de la suite héréditaire des nombres, nous ne disposons d'aucun critère réel permettant de tester l'appartenance ou la non-appartenance d'un objet à la suite des nombres naturels – en termes techniques : il y a des modèles non-standard pour une théorie formelle de l'arithmétique fondée sur les axiomes de Peano dont on sait qu'ils ne sont que la formalisation des essais, finalement très voisins, de Frege et de Dedekind pour fonder l'arithmétique dans une pure logique. C'est donc plus que jamais que nous sommes renvoyés à une tentative de fondation *transcendantale,* dans une logique transcendantale.

Reprenons encore une fois les choses. La définition nous dit que *si* a) tout objet, donc pas encore y, qui a la relation φ avec x tombe sous le concept F, et b, la relation φ est une relation de transmission héréditaire dans la suite φ des propriétés F caractérisant l'un quelconque de ces éléments, *alors,* y, qui est *à présent individué* (c'est en ce sens que la définition est créative), tombe sous le concept F, quel que soit ce concept F, et cela signifie que y *succède* à x dans la suite φ. La définition revient donc à dire que y ne s'individue comme le successeur de x que dans la mesure, ou à partir du moment où la *relation* φ se définit comme relation de transmission héréditaire des propriétés F dans ce qui devient par là la *suite* φ. C'est donc seulement la spécification de la relation φ comme relation de transmission héréditaire qui permet d'individuer y, mais cela, bien sûr, à partir du choix ou de l'individuation de x – nous sommes par conséquent très près de la définition du § 76 –, mais pas encore comme « premier élément ». En ce sens, par conséquent, cette définition de la succession φ dans une suite φ permet l'individuation de proche en proche d'un élément y à partir d'un élément x – et par là, nous avons presque une définition inversée par rapport à celle du § 76, ce qui est normal puisqu'on recherche la définition du *successeur* de x, quel que soit x. Eu égard à l'objet x individué ou choisi comme l'*un* des objets ayant *la* propriété F, il y a, en effet, plusieurs objets possibles qui sont avec x dans la relation φ; mais si la relation φ est une relation de

transmission héréditaire, c'est-à-dire une relation qui transmet héréditairement *toutes* les propriétés caractéristiques de x, alors il y a *un* objet y qui est relié à x par cette hérédité de toutes les propriétés caractéristiques de x, ce qui ne veut pas dire qu'il n'y en ait qu'un seul, mais qu'on puisse au moins en trouver *un* (et par là, l'individuer) qui ait exactement les mêmes propriétés – on peut passer de x à la classe de ses héritiers, parmi lesquels on peut toujours individuer *un* objet y. Par là même se précise la *circularité* qu'il y a dans la définition : car on ne peut pleinement individuer x comme élément d'une suite φ héréditaire que si l'on sait d'avance quelles sont ses propriétés caractéristiques, c'est-à-dire précisément les propriétés qui sont significatives eu égard à la transmission héréditaire, et pour reconnaître ces dernières, il faut, toujours déjà, posséder au moins l'un des héritiers de x, au sens fort du terme. Par où il vient donc qu'à l'inverse de ce que nous venons de dire, *l'individuation de* x *ne peut aller, de son côté, sans l'individuation corrélative de* y – ce pourquoi nous disions que nous avions avec cette définition *presque* l'inverse de la définition du § 76.

Il n'y a, apparemment, rien de plus à tirer de ce § 79 : on est irréductiblement renvoyé de l'individuation corrélative de x et de y à la spécification de la relation φ comme relation de transmission héréditaire dans une suite φ, et de la spécification des propriétés caractéristiques de l'hérédité dans la suite φ à l'individuation corrélative de x et de y.

Autrement dit, on est irréductiblement pris dans la *circularité* de la définition qui renvoie indéfiniment de l'un à l'autre, mais, du moins avons-nous gagné ceci que cette circularité n'est pas la circularité logique d'une simple tautologie exprimable dans un jugement de recognition, mais une *circularité transcendantale* en vertu de laquelle la définition se constitue comme recognition ou reconnaissance *transcendantale* (« créative » dit Frege) de l'équivalence, quant au sens, de deux expressions (le définissant et le défini), ou de deux processus (l'individuation corrélative de x et de y comme se succédant dans la suite φ et la définition de la relation φ comme relation héréditaire). L'un ou l'autre est donc toujours déjà présupposé, et vu l'abstraction de la définition, nous ne disposons encore d'aucun moyen, soit pour procéder à l'individuation de x et de y, soit pour spécifier (ce qui est en réalité la même chose, nous l'avons vu) la relation φ comme relation de transmission héréditaire des propriétés F. Bref, nous n'avons encore aucun moyen pour procéder à l'engendrement transcendantal d'une suite φ héréditaire et à l'individuation transcendantale, dans le même mouvement (nécessairement, en vertu de la circularité ici en œuvre), d'au moins deux termes ou éléments de cette suite. Ce moyen va nous être fourni par Frege aux § § 81-83 où, comme nous allons le voir, nous allons retrouver clairement un équivalent transposé de la définition du § 76, et ce, à travers l'explicitation du concept « appartenant à la suite naturelle des nombres se terminant par n ».

Nous obtiendrons le moyen de l'individuation par l'introduction du concept de successivité *immédiate* dans la suite N.

III. LA SUITE NATURELLE DES NOMBRES

Au § 81, Frege précise tout d'abord qu'il va désormais prendre la relation φ comme relation de succession immédiate dans la suite N (« suite naturelle des nombres »), et définit ensuite la succession φ de y à x *ou* l'identité de y à x par l'appartenance de y à la suite φ *commençant* avec x *et* l'appartenance de x à la suite φ se terminant avec y. Cela lui permet alors de définir l'appartenance d'un objet a à la suite N *se terminant par n* par la succession de n à a dans la suite N *ou* par l'identité de n à a. La nouveauté ici est manifeste : on fixe à la suite N un *commencement* ou une *fin*, c'est-à-dire qu'on l'arrête quelque part. Quelle est la signification transcendantale de ce *principe d'arrêt* de la suite eu égard aux propriétés F et à leur transmission héréditaire dans la suite φ?

Ce qui est caractéristique, c'est la conjonction de deux propriétés pour caractériser la disjonction de deux propriétés : y succède à x *ou* y est identique à x si et seulement si y appartient à la suite commençant avec x *et* x appartient à la suite se terminant avec y, par où il vient que la succession de y à x ou l'identité de y à x revient à *délimiter un segment de la suite φ* commençant avec x et se terminant avec

y. Autrement dit, et ceci est capital, l'individuation d'un seul coup de x et y comme éléments de la suite revient à *arrêter la suite entre* x *et* y, pris respectivement comme premier et dernier terme, à disposer par conséquent d'une totalité ou d'un *ensemble* d'éléments de la suite compris, étant donné la relation d'ordre établie par la suite, entre x et y, cet ensemble pouvant être constitué, à la limite, par un seul élément ainsi que l'indique la note ajoutée par Frege en bas de page. Nous comprenons par là que le choix ou l'individuation d'un objet x « distingué » pour définir la successivité dans la suite N revient à la fixation, pour la suite, d'une *origine*, et que, dans la mesure où, comme nous l'avons montré, cette individuation de x ne peut aller sans l'individuation corrélative de y, cette même individuation revient du même coup à la fixation, pour la suite, d'une *fin*, si bien que nous nous retrouvons, avec la circularité qui renvoie d'une individuation à l'autre, aux prises avec la circularité des déterminations corrélatives, pour la suite, de cette origine et de cette fin : l'origine ne va pas sans la fin, et la fin ne va pas sans l'origine, elles se déterminent réciproquement dans un seul et même mouvement, et c'est par cette circularité que se constitue aussi, nous le comprenons, une *totalité* (un ensemble) *déterminée* comme totalité d'une *multiplicité d'éléments*. C'est dire que nous sommes désormais très proches du lieu même où se constituent les catégories kantiennes de la quantité.

Toute la difficulté, qu'il nous faut réfléchir du

point de vue transcendantal, est la suivante. De la suite φ comme relation φ de transmission héréditaire à ses éléments d'une classe de propriétés F, on ne peut dire qu'elle est définie qu'en faisant *comme si* elle était toujours déjà définie, car cela seul permet de faire face à la circularité renvoyant de la définition de cette classe de propriétés F à la définition de la suite φ, et de ces deux définitions à la définition de ces éléments, comme ne constituant pas une difficulté. Or, à moins d'être platoniciens ou néo-pythagoriciens, donc à moins de supposer que la suite N est un objet toujours déjà constitué a priori ou de toute éternité – ce qu'on ne peut certes s'empêcher de faire, mais seulement jusqu'à un certain point puisqu'il s'agit précisément de trouver les fondements de la suite N –, cette suite N ne nous est justement pas connue en transparence, ou mieux, cette suite N, précisément, nous ne pouvons pas savoir très précisément en quoi elle consiste – sinon toute la recherche, aussi bien celle de Frege que la nôtre serait sans objet. Par conséquent, nous devons bien, certes, présupposer la suite N – ce qui est déjà fait par les expressions « suite *naturelle* des nombres » ou « suite des entiers *naturels* », etc. –, mais dans le même mouvement prendre en compte l'*indétermination* qu'il y a en elle, au moins *pour nous.* Et cette différence entre la suite N présupposée toujours déjà, a priori, et ce que nous en savons a posteriori, et qui est très peu, est précisément *la différence critique transcendantale* à l'intérieur de laquelle peut se déployer une philosophie transcen-

dantale, et pour nous, une phénoméno-logique transcendantale.

Toute la difficulté, féconde pour l'interrogation transcendantale, tient donc en ceci que si, d'une certaine manière indéterminée, nous disposons toujours déjà de la suite N, d'une autre manière, également indéterminée, et dans la même mesure, nous ne savons pas ce qu'est la suite N, ou plutôt, et tel est ici le mouvement de la réduction phénoméno-logique, nous devons *feindre* de n'en savoir *rien* même si nous opérons quotidiennement avec elle. A ce titre, nous devons prendre la définition frégéenne de la transmission héréditaire de propriétés F dans une suite φ comme une *définition purement formelle,* qui ne nous apprend *rien* quant à la suite N sinon ce qu'il faut, formellement, pour qu'elle soit une suite φ.

Dès lors, il n'y a pas d'autre moyen que de réfléchir *la constitution d'un segment de la suite,* borné par x et y, comme une *détermination relative* de l'*indéterminité* a priori de la suite, ou plutôt, comme une détermination relative mais réflexive, a posteriori, de l'indéterminité a priori de la suite, *réflexive* en tant que cette détermination se réfléchit ou se reconnaît elle-même a posteriori, mais *d'un seul coup* dans l'a posteriori, comme détermination *de la suite* telle qu'elle est censée être a priori, et pas de n'importe quoi d'autre; c'est donc aussi une détermination réflexive en tant qu'elle se reconnaît, dans l'a priori, comme n'altérant pas ou ne faisant pas perdre ce qui constitue la suite *en tant que telle,*

même si, par ailleurs, elle semble bien le faire puisqu'elle consiste à arrêter la suite en un segment qui risque toujours d'être pris pour une pure et simple collection, ce qui est du reste nécessaire si l'on veut pouvoir y appliquer la définition du nombre cardinal, ou tout au moins si l'on veut le réfléchir dans l'abstraction qui le constitue en extension d'un concept (le concept « appartenant à la suite naturelle des nombres commençant par x et se terminant par y »). Il vient donc, nous le comprenons à présent, que ce concept est lui-même ce que nous nommerons un *concept cumulateur,* chargé de bloquer pour ainsi dire l'accumulation indéfinie des éléments de la suite, et permettant de reconnaître, au moins localement et partiellement, quelque chose de ce qui constitue l'*hérédité* de la suite puisqu'on dispose, avec x et y, d'une *origine* et d'une *fin provisoires* et *relatives* de la suite.

Avec le concept cumulateur, corrélatif de la détermination réflexive d'un segment de la suite, et donc de l'individuation d'un seul coup d'une origine et d'une fin provisoires (ou arbitraires) pour elle, nous faisons un pas de plus : car nous comprenons qu'identifier ce segment à soi revient à l'objectiver comme l'extension d'un concept, et surtout à *identifier à soi ce qui* dans la suite en tant que suite indéfinie et donc indéterminée, *garde toujours en soi de la non-identité à soi.* Nous avons là une opération structurellement identique à l'opération transcendantale unique constitutive du 0 et du 1.

Approfondissons ce dernier point, en désignant

par concept G le concept « appartenant à la suite naturelle des nombres commençant par x et se terminant par y ». Le concept G permet de considérer comme un *objet unique* un segment de la suite (commençant par x et se terminant avec y), c'est-à-dire de rassembler en une unité objective, un ensemble, les éléments de la suite appartenant à ce segment, ce qui permet alors d'envisager l'appartenance (ou la non-appartenance) d'un objet quelconque à ce segment, à savoir la succession (ou la non-succession) de cet objet à un objet x individué. Mais par-là, la considération de cet « ensemble » va de pair avec l'individuation corrélative des objets x et y, qui est en réalité déterminante pour la constitution du segment de la suite. Il y a cependant plus encore si nous relisons le § 81 : il y a que la constitution du segment signifie la même chose que la constitution de la *succession* de y à x dans la suite φ (ou de l'identité s'il n'y a qu'un seul élément, x, dans le segment). Cela signifie que la constitution du segment comme objet unique doit, si elle se veut détermination réflexive a posteriori de la suite en tant qu'a priori, être constitution *rétrospective,* en laquelle s'individuent les objets x et y, ou en laquelle x ne s'individue que comme précédant y et y comme succédant à x – ce en quoi, avant d'être un ensemble ou l'extension objective du concept G, le segment est tout d'abord déterminé comme segment *de la suite* φ, ce qui y reste indéterminé, et qui, selon Frege, ne pourra se déterminer que par la médiation de la cardinalité, donc de l'extension objective

du concept G, étant précisément le « nombre » d'éléments de la suite φ *intermédiaires* entre x et y. Par conséquent, nous n'avons *pas encore* précisé ici en quoi consiste *l'individuation des éléments de la suite de proche en proche* ou le processus de cette individuation de proche en proche par *itérativité successive.* Mais nous avons bien le processus d'individuation corrélative de deux éléments quelconques (x et y) *de la suite* φ – une relation d'ordre générale entre ces éléments – en tant que déterminant l'un de ses segments, pour la détermination duquel il faut encore une abstraction réfléchissante, un jugement de recognition au sens frégéen du terme, puisque l'on ne sait rien d'autre, au stade présent, que le fait que des éléments de la suite, rassemblés ou cumulés par le concept G, se sont accumulés entre x et y, le processus même de cette accumulation nous restant inconnu.

Si donc nous nous rapprochons du processus transcendantal d'engendrement de la suite N, nous en sommes encore fort éloignés. Nous disposons simplement, au terme du § 81, d'une définition plus précise de la succession dans la suite φ, et ce, par la médiation d'une détermination réflexive a posteriori d'un segment de la suite, et d'un concept cumulateur de la suite, accumulant entre une origine et une fin encore individuées dans un relatif arbitraire, un certain « nombre » d'éléments ou de maillons de la suite. Pour arriver à l'individuation de proche en proche par itérativité successive, il faut entrer dans le § 82, c'est-à-dire montrer que

le nombre qui revient au concept « appartenant à la suite naturelle des nombres se terminant par n » (que nous désignerons conventionnellement par H_n) suit *immédiatement* n dans la suite naturelle des nombres. Et pour démontrer cette proposition, il faut précisément, ainsi que nous le dit Frege, une *condition supplémentaire.* Quelle est-elle?

Ainsi que nous l'explique le § 81, pour montrer que le nombre qui revient au concept H_n suit immédiatement n dans la suite N, il faut montrer *trois* propositions : la première indique en quelque sorte la transmissivité de la validité de la proposition à démontrer pour deux nombres a et d se succédant immédiatement dans la suite N, ce qui implique que la propriété à démontrer *fait partie des propriétés* F *devant se transmettre héréditairement dans la suite* N. La seconde indique la validité de la transmission héréditaire de la propriété à démontrer *à partir de* 0, et la troisième cette même validité à propos d'un n quelconque appartenant à la suite N *commençant par* 0, ce qui, seul, permettra d'individuer de proche en proche tous les nombres de la suite N à partir de 0. Comme Frege l'explique clairement, on ne fait donc, ici, qu'appliquer la définition donnée au § 81 de la succession de y à x dans la suite N, à d et à a, et ensuite à n et à 0.

Si nous restons attentifs à l'enchaînement des arguments frégéens, il faut d'abord préciser, par une démonstration, en quoi consiste cette propriété F qui doit se transmettre héréditairement dans la suite N. Pour cela, il faut donc montrer que

a est le nombre qui revient au concept « H_a mais non-identique à a », et que ce concept a *même extension* que le concept H_d, avec d précédant immédiatement a dans la suite N. Mais dans la mesure où ces deux propositions signifient intuitivement (dans la réflexion a posteriori de ce qu'il faut tout juste exprimer pour ne pas être infidèle à la suite N a priori) qu'aucun objet appartenant à la suite N *commençant par* 0 *ne peut se succéder à lui-même* dans la suite N, c'est finalement cette proposition elle-même qu'il faut démontrer pour exhiber ce qui constitue la propriété F devant se transmettre héréditairement dans la suite N. Le moyen nous en est fourni, précisément, par la définition du § 79 de la transmission *héréditaire* de propriétés F dans la suite φ – dans la mesure précisément où l'hérédité suppose la transmission, c'est-à-dire qu'un élément ne peut y être l'héritier de soi-même –, mais à la propriété F telle qu'elle a été énoncée jusqu'ici (le nombre qui revient au concept H_n suit immédiatement n dans la suite N), il faut ajouter la propriété que n appartienne à la suite N *commençant par* 0 – et telle est, finalement, la condition supplémentaire indiquée par Frege, qui seule permet l'individuation des nombres de proche en proche, par itérativité successive.

L'enchaînement des arguments est fort complexe parce qu'il y a en lui, à notre sens, cohabitation de *deux* exigences : une exigence formelle qui, comme toujours chez Frege, est parfaitement remplie, et une exigence de détermination *effective*, « maté-

rielle », de la propriété F, qui n'acquiert en fait tout son sens qu'à la fin de l'ébauche de démonstration puisque c'est seulement à partir de la détermination de l'origine, 0, de la suite N, qu'on peut se prémunir contre le danger qu'un nombre n quelconque puisse se succéder à lui-même, et cela, tout simplement parce que la suite N ne peut être définie strictement comme telle qu'à partir de 0, de son origine ou de son commencement qui transforme la relation d'ordre en relation de *bon* ordre, rigoureusement univoque – l'ordre, précisément, d'*itérations* successives, qui permet seul de démontrer l'équinumérici-té des concepts « H_a mais non identique à a » et H_d, a suivant immédiatement d dans la suite N, donc de considérer que deux termes successifs de la suite ne désignent pas en fait le même objet. Bref, c'est seulement la fixation du 0 comme origine ou premier élément de la suite qui permet d'associer univoquement la propriété F héréditaire (le nombre qui revient au concept H_n suit immédiatement n dans la suite N) à tout nombre de la suite. C'est donc là manière de dire qu'un nombre n ne peut être *individué* que par rapport à l'individuation du 0 – et c'est bien naturel puisque, pour fixer un y, il faut un x, et donc déterminer un segment de la suite, le concept H_n n'ayant donc lui-même de sens *univoque* que si l'origine du segment qu'il caractérise est elle-même *univoquement déterminée.*

Tout revient donc, du point de vue transcendantal, à comprendre ce qui distingue l'individuation corrélative de 0 et 1 de l'individuation corrélative

de 0 et n. Réfléchissons tout d'abord sur ce qui caractérise plus proprement la détermination réflexive a posteriori d'un segment de la suite commençant par 0 et se terminant par n. Tout d'abord, le concept H_n précisé de la sorte (par l'origine 0 du segment) permet de réfléchir en un ensemble ou classe d'éléments une section de la suite N commençant par 0 et se terminant par n, et, moyennant cette réflexion, de réfléchir, cette fois au sens frégéen de la recognition, le nombre cardinal de cet ensemble. Par là se précise en quel sens le concept H_n est un concept *cumulateur :* par l'arrêt qu'il signifie de la suite N, il met fin, pour un instant, à l'accumulation indéfinie des éléments de la suite N, en permettant pour ainsi dire un regard *rétrospectif* unique sur ce processus d'accumulation, comme si le nombre cardinal revenant au concept H_n était chargé d' « enregistrer » l'accumulation des termes de la suite qu'il y a eu depuis 0 jusqu'à n, par où l'on voit que le nombre cardinal est pour ainsi dire à chaque fois, à chaque itération successive de proche en proche constitutive de la suite, la « mémoire » de la suite, la prise en compte de la succession des itérations de la suite en cours d'accumulation. Mais il faut bien réfléchir au fait que le nombre qui revient au concept H_n, nombre qui est donc un nombre cardinal, n'est défini que par rapport à un élément n quelconque de la suite, et qu'en tant que tel, il doit en constituer le successeur : on s'aperçoit par là que n doit déjà avoir été défini comme tel pour que son successeur le

soit, ou que, à ce stade, la suite elle-même reste encore relativement indéterminée, ce pourquoi Frege ajoute la condition que n lui-même doive appartenir à la suite N commençant par 0. Il n'empêche que, ce qui est tout à fait caractéristique et d'une importance capitale, *la section* H_n (nous utilisons conventionnellement le terme section pour indiquer que le segment commence par 0) *ne se constitue comme objet unique, comme classe ou ensemble, que depuis un lieu de réflexion exclu de la section elle-même,* et qui viendra lui-même à être occupé par l'élément de la suite qui succède immédiatement à n. Et il le faut bien pour que, depuis ce lieu de réflexion, s'identifie à soi en s'objectivant l'extension du concept H_n, c'est-à-dire le nombre cardinal revenant au concept H_n, et dont on sait, par la réflexion a posteriori de la suite a priori, qu'il est le nombre succédant immédiatement à n, déterminé à son tour comme élément de la suite N par la détermination de n comme élément de la suite N commençant par 0. En d'autres termes, si l'on ne se donne pas cette dernière détermination comme toujours déjà effectuée, il vient que la section de la suite considérée étant arbitraire, elle reste toujours *relativement indéterminée,* et le demeure tant que les éléments de la suite ou les maillons de la chaîne n'ont pas été *individués* de proche en proche, par itération successive – à moins de présupposer, comme semble bien le faire Frege, mais comme nous ne pouvons pas le faire tout simplement, que la suite soit toujours déjà constituée d'individus dis-

tincts. Si l'on réfléchit par surcroît que l'individuation du successeur de n ne peut s'effectuer, comme nous avons tenté de le montrer, que corrélativement à l'individuation de n comme membre de la suite N (commençant par 0), il vient que, sans l'individuation de proche en proche dont nous venons de parler, l'indétermination de la suite réside aussi, du point de vue transcendantal, dans l'indétermination de ses éléments ou des maillons de la chaîne qu'elle constitue. Si donc la chaîne consiste en une accumulation de maillons, ces maillons eux-mêmes ne se déterminent que *comme maillons,* c'est-à-dire comme éléments toujours déjà enchaînés au précédent et au suivant, toujours déjà ouverts sur le maillon qui précède et le maillon qui suit, donc traversés, en leur identité à soi supposée, par de la non-identité à soi qui renvoie, irréductiblement, d'un maillon à d'autres maillons. Par conséquent, l'arrêt de la suite à un n quelconque pour en constituer une section ne peut aller, dans son mouvement propre d'arrêt, sans laisser ouverte cette non-identité à soi de n quelconque dans l'identité à soi, et la réflexion objectivante, dans la recognition de l'extension du concept H_n, apparaît de la sorte comme l'identification à soi de cette non-identité à soi – tout comme dans la définition de la succession immédiate donnée au § 76 –; il vient donc que joue, en tout maillon de la chaîne, quelque chose de structurellement identique à ce qui se joue dans la constitution du 1 et du 0. Par conséquent encore, il y a, dans la génération de la suite, ou dans le processus

d'accumulation de ses maillons, le *même* clignotement de l'identité à soi et de la non-identité à soi qu'il y a dans la génération du 1 et du 0 : en quelque sorte, la suite joue comme le 0 par une ouverture indéfinie, ou par le processus indéfini de son accumulation, et l'on comprend par là qu'il n'y a pas de moyen, propre à elle, d'arrêter ce jeu ou ce clignotement de l'identité à soi et de la non-identité à soi.

De la sorte se comprend, dans un second temps, que le concept H_n précisé par la fixation de 0 comme origine (le concept H_n comme concept d'une section de la suite) ne peut être pleinement défini, du point de vue transcendantal, que par une suite d'arrêts successifs de la suite, suite d'arrêts commençant par 0 et épousant pour ainsi dire le *rythme* d'accumulation de la suite.

Tout tient dans *la mutation du lieu de réflexion* rétrospective arrêtant la chaîne ou la suite en une section depuis un lieu qui lui est extérieur, en *maillon de la chaîne.* C'est par là en effet que, s'identifiant à soi, ce lieu de réflexion devient lui-même un objet (une extension objective, c'est-à-dire un cardinal) à son tour immédiatement repris comme maillon de la chaîne dès lors que le lieu de réflexion s'est du même coup déplacé ou propagé à l'extérieur de la section de la chaîne. Autrement dit, si cette mutation est possible, c'est que ce lieu de réflexion est déjà, pour ainsi dire potentiellement, un maillon de la chaîne avec tout ce qu'il a d'indéterminé, donc d'encore non identique à soi, tout comme le zéro, l'extension vide, ne se constitue comme objet iden-

tique à soi que dans l'identification à soi, a posteriori, donc rétrospective, de la non-identité à soi, depuis un lieu de réflexion qui lui est extérieur, mais qui est potentiellement maillon de la chaîne.

Le lieu de réflexion se constitue en élément de la suite ou en maillon de la chaîne de la *même manière* que la non-identité à soi subsumant le zéro (à savoir l'absence effective d'une identité) se réfléchit à son tour en identité à soi (par l'identification réflexive à soi de la non-identité à soi) subsumant le 1 (c'est-à-dire : il y a *une* identité qui est identifiée à soi dans la recognition, et c'est précisément le 0), et cela, parce que le lieu où se réfléchit la non-identité à soi se fixe lui-même en se réfléchissant comme identique à soi depuis un « nouveau » lieu de réflexion.

Selon Frege, il faut montrer que le nombre qui revient au concept « H_a mais non identique à a » est a, et que ce même concept a même extension que le concept H_d, d précédant immédiatement a dans la suite N. Réfléchissons sur le concept « H_a mais non identique à a », et désignons-le, selon la convention de Zermelo (1904) par H_a-a. Ce que la proposition signifie, c'est que a est le nombre cardinal de H_d, c'est-à-dire de la section de la suite (commençant par 0) arrêtée à a mais dont on a ôté a (il n'en reste donc que la section se terminant par le prédécesseur immédiat de a), donc que a en tant que nombre cardinal de H_a-a s'identifie à a en tant que nombre ordinal (membre de la suite), par conséquent que a ne s'individue comme nombre qu'à partir du moment où il est envisagé comme lieu de

réflexion permettant d'*excepter* a de la section considérée de la suite et de réfléchir H_a-a en l'extension ou le cardinal a. Il vient donc que cette extension réfléchie n'est rien d'autre que le lieu de réflexion de la section de la suite qui le précède, lui-même réfléchi comme tel, ou que cette réflexion se réfléchit elle-même en tant qu'extension H_a-a, c'est-à-dire H_d.

Reprenons ce mouvement de plus près : a, qui est comme « l'élément distingué » du concept H_a, est un « élément » *réfléchissant* qui permet de réfléchir la section H_a-a ou H_d à laquelle *il n'appartient pas,* et qui se réfléchit en H_a à laquelle *il appartient* en tant qu'il se dépose comme nombre cardinal attaché au concept réfléchi H_a-a. On retrouve la même chose que dans le § 76 (ce qui est normal puisque les propositions à montrer ici en sont très proches) : H_a-a, donc H_a, donc H_d, ne se déterminent que rétrospectivement, depuis a, d'un seul et même mouvement; tant que H_a-a ne se réfléchit pas comme tel en s'objectivant dans une extension, le segment de la suite demeure *indéterminé,* ou plutôt il clignote entre l'identité à soi acquise du fait de sa réflexion objectivante et la non-identité à soi résultant de ce que c'est seulement une section de la suite à laquelle a *n'appartient pas,* l'identification à soi revenant à inclure a dans la suite, l'individuation (le choix) de a revenant à exclure a de la suite, l'une ne pouvant cependant pas se faire sans l'autre, ce qui constitue ici toute la difficulté, puisqu'il faut arriver à penser les deux dans un seul et même mouvement.

L'individuation – en termes techniques : le choix – de a ne peut donc s'effectuer que depuis une réflexion ou une identification à soi que cette individuation rend pourtant possible. Telle est la situation circulaire que nous avons rencontrée, avec ce corollaire que c'est seulement par cette réflexion que a s'identifie comme successeur de d, précédant immédiatement a. C'est dire que, par ceci, nous gagnons une médiation supplémentaire, d'un intérêt crucial pour notre réflexion transcendantale : l'individuation de a s'effectue dans une réflexion a posteriori, c'est-à-dire dans l'identification à soi, a posteriori, de a en tant que phénomène individué, et c'est seulement cette réflexion transcendantale a posteriori de a en tant que phénomène individué qui peut se transformer, en s'abstrayant d'elle-même, en réflexion logique, c'est-à-dire en jugement de recognition où a s'objective comme l'extension du concept H_a-a, et par là du concept H_d. Donc a en tant que phénomène individué se phénoménalise comme lieu de clignotement entre son identité à soi – mais alors il disparaît comme phénomène et apparaît comme imminence du concept – et sa non-identité à soi – où il apparaît en tant que phénomène distinct de son concept mais disparaît du même coup comme phénomène individué –, et son identité à soi l'assigne comme *terme* de la suite, à savoir aussi comme sa fin provisoire, précédée d'un autre terme, alors que sa non-identité à soi le désigne comme *phénomène indéterminé de la suite,* à savoir comme

phénomène faisant partie d'une chaîne indéterminée de phénomènes.

Efforçons-nous d'approfondir ce dernier point. Ce que nous venons de dire n'est rien d'autre que le « répondant » transcendantal de cette situation où a comme membre de la suite est a priori quelconque, choisi arbitrairement, et où il ne s'individue comme *tel* membre de la suite qu'à partir de la recognition objectivante de H_a-a. Ce qui signifie, d'un point de vue transcendantal, que la suite ne peut elle-même paraître a priori comme rien d'autre qu'un *enchaînement* indéterminé ou *quelconque de phénomènes,* et que ces phénomènes ne s'individuent les uns par rapport aux autres que par la constitution de la suite N – on les affectera alors d'indices censés recouvrir, de proche en proche, les nombres naturels de la suite N, c'est-à-dire subsumer l'accumulation des termes de la suite, ou garder chaque fois la « mémoire » de cette accumulation. Cela étant, la suite ne joue, dans cette individuation réflexive a posteriori du phénomène, que comme l'a priori radicalement distinct de l'a posteriori, ou comme l'a priori phénoménal qui fait que tout phénomène se phénoménalise en tant que phénomène, mais qui lui-même échappe principiellement à toute individuation en tant qu'il constitue pour ainsi dire le fond de non-identité à soi sur quoi s'enlève toute identification à soi individuante, donc en tant qu'il constitue en quelque sorte la réserve infinie de *prolifération* des phénomènes – cette prolifération n'étant pas encore accumulation, pour laquelle il

faut la constitution de la suite N comme une sorte de « mémoire » transcendantale.

Il vient donc par là que la suite, comme a priori phénoménal, ne peut être que *non identique à soi* (« inconsistante » disait Cantor en 1899 à Dedekind), d'où l'extrême difficulté de la définir logiquement, et le parti pris par Frege de la présupposer définie pour la définir. Il en résulte que, à moins de supposer le problème résolu – ce qui est légitime d'un point de vue mathématique, mais illégitime d'un point de vue transcendantal –, la suite *en tant que telle* ne peut être subsumée par aucun concept, si ce n'est le concept de non-identité à soi. Nous aboutissons de la sorte à cet apparent paradoxe que si un nombre cardinal devait revenir à la suite en tant que telle, ou en tant qu'a priori, ce serait le nombre 0 – mais c'est un problème bien connu de l'hérédité qu'on est à la fois fils et père (fille et mère), héritier et transmetteur de l'hérédité, successeur et prédécesseur, donc que le concept même d'hérédité est *en soi* contradictoire, et que c'est en vertu même de cette contradiction qu'il y a hérédité.

Si nous y réfléchissons bien, nous sommes en fait en train de nous acheminer vers une conséquence tout à fait capitale : la reconnaissance de a par rapport à H_a-a étant la répétition de la reconnaissance de 1 par rapport à l'extension H_1-1 (c'est-à-dire l'extension vide), il nous suffira de parvenir à les *distinguer* pour obtenir un moyen permettant de garantir la reconnaissance transcendantale par lui-

même du cycle ou du rythme de la pensée qu'il y a dans la constitution du 1 et du 0, donc pour fonder *la possibilité de la chaîne en tant que répétition indéfinie de la même répétition.* Concentrons donc notre attention sur la possibilité a priori de cette distinction.

Et revenons-en, pour commencer, à « l'abstraction transcendantale » qui permet d'arrêter la suite. Cette abstraction qui permet de fixer le concept H_a vient de ce que la suite est indéterminée en chacun de ses maillons, mais qu'elle peut se déterminer, selon l'une de ses sections, comme classe ou comme extension d'un concept à partir de l'un quelconque de ses maillons, concept dont le maillon choisi (ou individué en tant que phénomène) comme lieu de réflexion ou d'identification fournit précisément ce même maillon comme nombre cardinal lui revenant, donc aussi comme élément successeur de la section de la suite réfléchie et objectivée en classe ou extension du concept. Et si l'on approfondit ce processus d'abstraction, il vient que, à partir du moment où le concept se détermine par l'individuation du maillon, il y a possibilité de réfléchir, d'identifier ou d'appliquer à soi la section de la suite pour en faire une extension dont tous les termes sont en correspondance biunivoque avec *eux-mêmes,* donc dont tous les termes sont *en principe identifiables ou individuables* comme termes appartenant à la section. Mais bien sûr, cela *présuppose* que la suite soit déjà cumulative : à cette condition seulement, la réflexion abstractive, à partir d'un quelconque maillon pris comme phénomène, c'est-à-dire lieu de

réflexion *exclu* de la section (H_a-a), est du même coup réflexion *rétrospective,* ou rétrospection transcendantale constituant, a posteriori, comme autant d'autres maillons qui la précèdent, les éléments individués de l'extension du concept H_a-a, c'est-à-dire, repérant, a posteriori, dans ces éléments eux-mêmes, les itérations qui sont censées avoir toujours déjà engendré la chaîne en autant d'applications successives, à savoir cumulatives – les éléments individués de l'extension H_a-a se muant de la sorte en *traces* des maillons de la chaîne, donc en « mémoire » de la chaîne, et c'est dans cette « mémoire », nous le comprenons, que se *phénoménalise le nombre.* Par là même nous apparaît la nécessité d'une médiation supplémentaire, que nous ne faisions jusqu'ici qu'entrevoir : pour que cette hypothèse soit juste, il faut que, dans cette réflexion abstractive, constitutive de l'arrêt de la suite, la réflexion rétrojette, depuis l'a posteriori du phénomène individué a, mais dans l'a priori indéterminé et en soi inaccessible, une sorte d'image a priori (mais n'apparaissant qu'a posteriori, du fait de la réflexion) du *rythme de ses itérations,* ou du rythme de ses rythmes, la réflexion objectivante de la section H_a-a ne constituant plus, de la sorte, que le *nombre* (cardinal, puis ordinal, dès lors que ce nombre est aussitôt reconnu à son tour comme successeur) comme *concept de ce rythme,* c'est-à-dire sa *trace objectivée.*

Il vient par là que toute la question du fondement transcendantal de l'arithmétique est celle *du fondement transcendantal par quoi la réflexion se phénoménalise elle-même pour elle-même dans un phénomène qui lui apparaît comme son rythme à elle* – ou tout au moins l'un de ses rythmes –, et par là nous apparaît la très profonde parenté qu'il y a entre mathématiques et musique. Le nombre est en effet là comme ce qui fait apparaître, pour ainsi dire, que la réflexion a battu – dans un passé transcendantal qui n'est pas passé réel – le même *rythme* fondamental (celui qu'il y a dans la constitution de la chaîne 0 - 1) dans une *répétition* bien déterminée de ce rythme fondamental (puisque, nous l'avons montré, la constitution de a comme cardinal de H_a-a se produit exactement de la même manière que la constitution de 1 comme cardinal ou extension ne comprenant que l'extension vide).

Si maintenant, nous réfléchissons au fait que la répétition en question n'est pas, a priori, bien déterminée, à moins de présupposer la suite N comme étant toujours déjà constituée, ce que nous ne pouvons pas faire au sein de l'attitude transcendantale, et si nous précisons que le phénomène individué a, jouant comme un lieu de réflexion, joue du même coup comme un *lieu de pensée,* la pensée étant le *mouvement même* de réfléchir qui vient s'inscrire dans l'identité et la différence de son identité à soi et de sa non-identité à soi, nous pouvons raffiner la médiation supplémentaire que nous venons d'introduire en nous approchant de ce qui doit bien être en jeu dans le concept de *successeur* pour accéder à ce qui nous apparaît comme son *schème transcendantal,* compris en un sens quasi ou hyperkantien. Réflé-

chissons pour cela à ce qui constitue un *maillon* de la chaîne comme tel. Il vient alors aussitôt qu'en lui, réfléchi comme tel, c'est-à-dire non encore situé dans l'ordre de la chaîne par la médiation de son numéro d'ordre ou de son nombre cardinal, donc pris en tant que maillon relativement indéterminé comme cela se passe dans l'individuation du phénomène a, se rencontrent le *penser* en tant que le réfléchissant ou le *mouvement même de réflexion* et la *pensée* en tant que le *phénomène* a *individué* mais *non encore* assigné comme *nombre* cardinal de la section H_a-a. Ce lieu de rencontre, le maillon l'est cependant comme tout phénomène. Ce qui le constitue en effet comme maillon, c'est le fait qu'en lui se rencontrent par surcroît les concepts contradictoires constitutifs de l'hérédité, à savoir qu'il *est à la fois* maillon *suivant* un autre maillon et maillon *précédant* un autre maillon, et c'est de cette étrange propriété que nous devons réfléchir les conditions de possibilité transcendantales. Nous y arriverons si nous reprenons ce que nous avons dit de la propagation du lieu de réflexion, car celle-ci n'est précisément rien d'autre qu'une *répétition* de ce même lieu, et c'est par là que nous accéderons, comme nous allons voir, au maillon comme schème transcendantal. Il suffit en effet de remarquer que l'individuation du phénomène a en tant que maillon n'est jamais achevée ou accomplie puisqu'elle clignote entre une identité purement abstraite, c'est-à-dire coupée du phénomène, et une phénoménalité également abstraite, où le phénomène perd toute

individualité – c'est là l'antinomie dans le phénomène entre son identité d'individu et sa pure phénoménalité. Cela signifie, eu égard au maillon, que si l'individuation du maillon a en tant que phénomène s'accomplit, si l'imminence de son identification à soi se réalise, a disparaît en tant que phénomène pour apparaître en tant que concept, mais alors, il n'est plus que le nombre cardinal ou l'extension objectivée comme telle du concept H_a-a, c'est-à-dire qu'il n'apparaît précisément plus comme maillon de la chaîne. S'il doit donc garder quelque chose de sa phénoménalité de maillon, ce ne peut être que dans la mesure où il garde un rapport avec le lieu de réflexion qui s'est propagé, toujours déjà, le long de la chaîne, c'est-à-dire dans la mesure où le concept abstrait se reconnaît du même coup comme phénomène en lequel subsiste encore la réflexion, ou plutôt le mouvement même de réfléchir – ce qui signifie, comme l'indiquait Dedekind dans sa *Préface* à son essai sur les nombres, que la cardinalité est en fait seconde par rapport à l'ordinalité, et que cette secondarité joue quelque part dans le texte de Frege, malgré ses intentions et son point de départ affichés. Autrement dit, à moins de couper le mouvement même de l'hérédité, ce qui se produit dans l'abstraction réfléchissante et objectivante du nombre cardinal, ce mouvement doit être compris de telle manière que l'individuation de l'un quelconque des maillons ne s'accomplisse pas, demeure en l'état d'inachèvement où l'identité individuelle du maillon joue comme un pôle clignotant

entre l'apparition et la disparition, l'apparition qui, le constituant comme individu identique à soi, l'exclut du même coup de la chaîne, et la disparition qui, le gardant comme phénomène en cours d'individuation, le maintient avec son indéterminité relative dans le mouvement même ou le rythme de la chaîne. Alors le nombre prend un autre statut que chez Frege, un statut phénoménologique transcendantal qui est plus proche de celui du nombre ordinal : car le nombre est alors précisément ce phénomène a en cours d'individuation à jamais inaccomplie – si ce n'est dans l'abstraction transcendantale –, et dont l'individuation se poursuit inlassablement tout au long de la chaîne. Ou plutôt, *le nombre devient, comme pour Kant, schème transcendantal de la quantité :* à la fois phénoménal, en tant qu'il apparaît comme nombre, en tant qu'il s'individue dans un mouvement qui ne s'accomplit pas en abstraction réfléchissant une idée ou un concept coupé de son apparaître comme maillon, et non phénoménal, porteur du mouvement même de la réflexion, en tant que ce nombre phénoménal, jamais réduit à l'abstraction d'une pure identité à soi, requiert de lui-même *à nouveau,* c'est-à-dire *dans la répétition,* un *autre nombre phénoménal (un successeur) comme ce qui seul, pourrait accomplir son individuation,* ce qui se produit relativement en tant que cet autre nombre s'individue à son tour, pour relancer cependant, du même mouvement, le *rythme même de l'individuation,* par où ce rythme, donc, se transmet héréditairement tout au long de la chaîne, de proche en proche.

Plus profondément, si l'on réfléchit à cette hérédité, le nombre comme schème transcendantal *est à la fois rétrojectif* sur le rythme qui se phénoménalise en lui du fait de sa réflexion individuante, rythme qu'il vise d'ailleurs à clore sur soi, à identifier à soi comme un objet dans la rétrojection pour le *centrer* dans un *concept* (le concept H_a-a), et *projectif* d'un rythme, d'une répétition qui s'anticipe en lui dans la mesure précisément où, si cette clôture est reconnue en lui comme la réalisation d'une imminence qui l'abolit en le faisant disparaître ou se perdre, il ne peut arriver à clore sur soi le rythme déjà phénoménalisé de la rétrojection, à l'enclore sur un centre qui en serait la négation, donc dans la mesure où le rythme de l'individuation, précédant toujours déjà la rétrojection, l'anticipe du même coup en lui échappant, c'est-à-dire en se projetant toujours déjà dans *une répétition de lui-même qui seule,* par là même, *apparaît comme originaire.* Autrement dit, c'est à raison même du fait que le rythme de l'individuation ne peut s'enfermer dans un concept ou une pure et simple identité à soi que ce même rythme apparaît originairement comme s'étant toujours déjà répété et comme devant sans cesse toujours encore se répéter : *le rythme lui-même ne se phénoménalise comme tel que* comme répétition de lui-même, c'est-à-dire *comme rythme même de sa propre répétition,* ce par quoi précisément il se phénoménalise comme rythme – *le rythme ne se phénoménalise comme rythme que dans le rythme de sa répétition.*

Dès lors, le statut transcendantal du nombre est

d'apparaître comme *le phénomène en lequel la répétition se phénoménalise comme se répétant* – c'est toujours la chaîne 0 - 1 qui se phénoménalise dans la chaîne (n - 1) – n –; ou mieux, d'apparaître comme *le schème transcendantal du rythme ou de la répétition en lequel le rythme ou la répétition se phénoménalisent comme se répétant.*

Si l'on y prête attention, cela signifie que, dans le schème transcendantal comme phénomène, la répétition ne peut jamais se saisir elle-même sur le fait, dans son mouvement même de se répéter, ou en tant que répétition répétante : elle n'y fait jamais que se réfléchir en tant que répétition répétée. Et pourtant, c'est cela même que requiert le schème transcendantal en tant que, de l'autre côté, la répétition répétante clignote en lui comme le centre absent, mais toujours virtuellement actif, de la répétition répétée. Ce centre absent est en quelque sorte l'*intervalle* qui enchaîne la répétition à la répétition, c'est-à-dire le penser même qu'il y a dans la répétition se répétant en ce qu'il y a de réfléchissant dans la répétition, quelque chose comme le pur mouvement de répéter et qui échappe radicalement à la pensée se reconnaissant comme répétition répétée : c'est pour ainsi dire le pur mouvement de s'accumuler de la répétition, en vertu de quoi la répétition se phénoménalise toujours, dans la répétition répétée, comme inscrite dans une chaîne indéfinie de répétitions. Et c'est par ce pur mouvement qui donne à la répétition répétée son statut de phénoménalité, qui la fait apparaître comme *rythme* de

la répétition ou comme *répétition rythmique du même rythme,* que se *constitue par conséquent l'espacement et la temporalisation transcendantale,* c'est-à-dire précisément *les horizons de phénoménalité du penser,* en tant que c'est sous ces horizons que le penser, la répétition répétante, vient à se reconnaître tout en se manquant dans la multiplicité indéfinie des répétitions répétées (des phénomènes), et se réfléchir, par ce manque lui-même, comme constituant les intervalles entre les maillons de la chaîne (entre les répétitions répétées), ces intervalles étant donc reconnus, mais après coup ou a posteriori, comme autant de lieux où sont censées s'effectuer a priori les *itérations successives* du penser, de la répétition répétante, ou comme autant de *lieux non phénoménaux* pour lesquels la répétition se phénoménalise comme répétition répétée – par où, du reste, si on prend les choses en toute rigueur phénoménologique, ces lieux eux-mêmes prennent apparence comme liant les maillons de la chaîne, mais comme les liant depuis leur absence au champ phénoménal, le processus de transmission héréditaire de la répétition apparaissant ainsi en creux, par son absence qui est là comme sa trace, de la chaîne des maillons phénoménaux ou des répétitions répétées, et toute tentative pour porter ce processus au phénomène autrement que par la trace de ces absences répétées, ne pouvant aboutir, on le voit, à autre chose qu'à une abstraction, à un concept, celui de la chaîne toujours déjà définie et constituée, ainsi que l'a fait Frege dans sa définition du § 79, ce qui nous montre

en retour toute la distance qu'il y a entre logique transcendantale et logique au sens frégéen.

Par là, nous comprenons au moins que ce qui constitue le nombre comme schème transcendantal de la répétition, c'est tout autant la répétition qui apparaît toujours déjà répétée, prise dans une chaîne indéfinie de répétitions, que le *clignotement* indéfini de la répétition répétante dans la répétition répétée, et que c'est même ce clignotement lui-même qui *rythme* activement la répétition en répétitions répétées : s'il y a rythme, c'est-à-dire *mouvement,* dans le schème, c'est par *ce clignotement* qui enchaîne la répétition à elle-*même, la fait indéfiniment se répéter dans le phénomène même de sa répétition.* S'il y a rythme de la répétition dans le nombre comme schème, c'est parce que ce clignotement du centre absent entre son apparition et sa disparition à jamais imminentes est cela même qui lie les phénomènes entre eux au sein d'une chaîne, en tant que c'est lui qui fait se répéter le rythme d'individuation du phénomène. Mais il vient, par là, que l'individuation de tel ou tel phénomène de la chaîne *n'est jamais achevée,* donc que *l'individuation du nombre comme schème transcendantal n'est elle-même jamais achevée* – et on comprend, de la sorte, que l'individuation des nombres naturels ne pourrait s'achever que si nous disposions de la totalité de la suite des nombres naturels, alors même que ce ne peut jamais être effectivement le cas. Il y a, dans l'arithmétique ordinaire, ou plus précisément dans la suite N des nombres naturels, quelque chose de *radicalement indéterminé,* car il reste irré-

ductiblement quelque chose du nombre comme schème transcendantal de la répétition dans le concept de nombre ordinal – quant au concept de nombre cardinal, nous avons vu qu'il ne pouvait être que secondaire par rapport au concept de nombre ordinal, mais pour le montrer en toute rigueur transcendantale, il nous faudrait maintenant ébaucher une logique transcendantale du concept.

C'est ce qu'il faudrait faire en essayant de montrer que seul le nombre comme schème transcendantal permet d'engendrer les catégories kantiennes de la quantité (unité, multiplicité, totalité), c'est-à-dire les catégories constitutives de ce qui est bien connu sous le nom de théorie des ensembles, et ce, nous le comprenons, parce que le nombre comme schème transcendantal est le seul élément qui nous permette, d'un point de vue transcendantal, d'envisager l'abstraction transcendantale d'*éléments abstraits individués* – présupposition constante de la théorie des ensembles.

Marc RICHIR