86/32

De l'illusion transcendantale dans la théorie cantorienne des ensembles

Marc RICHIR

1. Théorie des nombres, infini et continu

C'est un fait généralement bien connu que la grande révolution de la pensée mathématique, qui a eu lieu, pour l'essentiel, en Allemagne, durant la seconde moitié du XIXe siècle, et qui a conduit à la célèbre «crise des fondements», est issue d'une réflexion sur les fondations de l'analyse, et plus précisément de la tentative de «libérer» cette dernière des «intuitions» géométriques qui la sous-tendaient encore. Cette radicalisation de la recherche, qui tendait à trouver pour l'analyse des fondements eux-mêmes analytiques, a conduit, selon des enchaînements problématiques que nous ne pouvons retracer ici[1], à l'élaboration d'une théorie des nombres, de l'infini et du continu, qui est en fait profondément aporétique, et dont les axiomatisations et formalisations du XXe siècle ont visé, principalement, à sauver l'essentiel.

De ce moment d'une très riche complexité auquel il faudrait encore associer la profonde refonte, sinon l'invention, de la logique par Frege, lui aussi préoccupé par la question d'une fondation en logique pure de l'arithmétique, nous ne prétendrons pas, en outre, faire l'historique, fût-ce sur un point limité, ou sur un auteur. Notre objet est simplement de montrer, à l'occasion de la fondation cantorienne de la théorie des ensembles, un aspect particulièrement sensible des apories rencontrées par ces «héroïques» mathématiciens fondateurs — apories demeurées telles aujourd'hui, et même rendues irréductibles par les théorèmes de limitation des formalismes[2], même si les mathématiciens et logiciens de notre temps sont bien obligés, comme tout un chacun, de «gérer la crise». Nous ne nous proposerons donc pas non plus d'étudier les réponses à la crise (axiomatisations et formalisations) proposées par la pensée logico-mathématique contemporaine, dans la mesure où elles nous paraissent fondamentalement *évacuer*, non certes les difficultés logico-mathématiques — il faut reconnaître, à cet égard, à notre siècle, une réelle profusion d'ingéniosité, d'inventivité, et même de génie

—, mais bien les difficultés *philosophiques* contenues dans ces apories. Par rapport au scientifique, le philosophe, pour peu qu'il ne se renie pas dans son entreprise, souffre de ce «désavantage» de ne pouvoir dissimuler les difficultés en les brossant sous le tapis. La «crise des fondements» des mathématiques lui pose en un sens des questions aussi vieilles que la philosophie, mais dans un langage et sous des horizons renouvelés, et dans cette ligne, nous pensons qu'il a beaucoup à gagner à dégager ce qu'il y a toujours, de manière plus ou moins dissimulée, de philosophique dans les grands «tournants» de la pensée scientifique. Faite par des hommes, celle-ci est autre chose qu'une collection de recettes techniques, car elle est autre chose, chez les fondateurs, les créateurs ou les inventeurs, qu'une simple «cuisine» relevant d'on ne sait quelle «informatique» plus ou moins raffinée — et nous ne jugeons nécessaire de le rappeler que pour réagir à l'idéologie (par définition pseudo-rationnelle) techno-scientifique qui voudrait engloutir ce que nous sommes et avons à être en le médiatisant par un *automaton* technologique *et* symbolique, dont nous ne construisons la fiction que pour mieux nous dégager du poids, il est vrai écrasant, de notre condition et de notre responsabilité. Etrange figure de la coalescence du «principe de plaisir» et de la «pulsion de mort» qui est l'un des signes majeurs de notre époque, et que, comme à chaque époque historique, nous avons à conjurer.

Que la théorie des nombres soit aporétique de part en part, c'est ce que montre déja la théorie des nombres les plus simples, les nombres naturels (1, 2, 3, ... n, ...) élaborée par Frege et Dedekind. Elle conduit déjà à des paradoxes philosophiques insolubles, dont les expressions les plus sophistiquées en langage logico-mathématique sont les théorèmes célèbres de Gödel (plan syntaxique) et de Löwenheim-Skolem (plan sémantique)[3]. Toute la difficulté vient en effet de ce que, pour «engendrer» (Dedekind) ou concevoir les conditions logiques de possibilité de la suite héréditaire uniforme des entiers naturels (Frege), on se trouve confronté à une circularité irréductible. Ou bien il faut déjà disposer de la suite N (des entiers naturels) tout entière pour savoir quels concepts s'y transmettent héréditairement, ou bien il faut déjà savoir quels sont tous ces concepts pour définir univoquement la suite N comme la suite en laquelle ces concepts, et pas d'autres, se transmettent héréditairement. Autrement dit, toute la difficulté, en réalité insoluble, vient de ce qu'il faut toujours déjà présupposer la connaissance de la suite N *tout entière*, qui est infinie, ou la connaissance de *toutes* les propriétés censées caractériser univoquement les nombres naturels. Or cette connaissance n'est donnée nulle part et elle est même impossible à donner, comme le montrent les théorèmes de limitation: elle est, ou bien une idée au sens kantien, mais alors la suite N n'est jamais univoquement définie puisqu'il y a toujours en elle une part irréductible d'indétermination ou d'inachèvement, ou bien l'illusion transcendantale (génératrice des paradoxes que l'on sait) qu'il y a dans l'*a priori* une connaissance accomplie de

la suite N (ou de ses propriétés), et c'est de cette illusion transcendantale que procèdent la fondation de l'arithmétique chez Dedekind et la même fondation chez Frege: illusion d'un infini dénombrable actuel (Dedekind) ou illusion de la connaissance de tous les concepts caractérisant les nombres naturels (Frege)[4]. En termes logico-mathématiques, la fondation est aporétique en ce qu'elle met en jeu des totalités qui ne peuvent se définir que de manière autoréférentielle (selon un cercle vicieux), et l'existence, très problématique, nous allons le voir ici avec l'œuvre de Cantor, de l'infini actuel.

Or, tout se tient dans la théorie des nombres: l'existence univoque des entiers naturels est nécessaire à l'existence univoque des nombres rationnels (obtenus par tous les quotients possibles d'entiers naturels), elle-même nécessaire à l'existence univoque des nombres irrationnels (obtenus par des extractions de racines de nombres rationnels: c'est l'antique problème déjà posé par le théorème de Pythagore). Mais par surcroît, il paraît nécessaire de disposer, avec la suite N actuellement infinie, d'un moyen de dénombrement, et donc de classement, d'infinités actuelles de nombres qui paraissent devoir être plus ou moins «abondantes» en éléments. La théorie des nombres du XIX[e] siècle paraît inséparable de la théorie des ensembles.

Or, ici, nous allons de surprise en surprise, et l'aporie que nous avons posée comme initiale ne fait que s'approfondir. Le procédé de «dénombrement» a été inventé par Dedekind et Cantor: il s'agit de la correspondance biunivoque (bijection) entre éléments de deux collections (intuitivement: d'ensembles). On peut montrer par là que l'ensemble de tous les rationnels est équipotent (a même puissance, ou même cardinal) à l'ensemble de tous les naturels[5]. Et de même pour l'ensemble de tous les irrationnels, puisqu'ils constituent, avec les nombres complexes, l'ensemble des racines des équations algébriques, lesquelles peuvent être mises en bijection avec l'ensemble des nombres naturels. Or, c'est là un premier paradoxe (paradoxe de l'infini) pour l'intuition géométrique traditionnelle, mais déjà pour l'intuition plus profonde du continu. Si nous reprenons l'axiome de continuité de Cantor («à chaque nombre correspond un point déterminé de la droite dont la coordonnée est égale à ce nombre»), et si nous considérons par exemple le segment compris entre 0 et 1, nous remarquons qu'il y a autant de rationnels, mais aussi d'irrationnels, compris entre 0 et 1, qu'il y a d'entiers naturels: autrement dit, nous sommes toujours en mesure, en principe, de les énumérer exhaustivement un par un avec l'aide des entiers naturels. Il n'y a donc, apparemment, qu'un seul genre d'infinité, qu'une seule manière de reconnaître itérativement, à l'infini, les éléments d'un ensemble infini. Que le segment soit compris entre 0 et 1 ou entre 0 et n, il s'agit de la même infinité, ce qui conduit à la définition possible de l'ensemble infini par Dedekind: c'est un ensemble équipotent à l'une de ses parties propres (scil. strictement incluse dans l'ensemble en question).

La situation est en fait bien plus paradoxale que le laisse paraître cette première présentation. Dans sa fondation de l'arithmétique (1887), Dedekind se trouve dans l'obligation de distinguer l'ensemble infini de l'ensemble simplement infini qui correspond à la suite N. Mais bien plus tôt déjà, en 1872, dans son essai intitulé *Continuité et nombres irrationnels* (d'où est tirée, nous allons le voir, la célèbre théorie de la «coupure»), Dedekind définit les nombres irrationnels par un passage à la limite qui fait de ceux-ci des nombres d'*une autre nature* que les nombres rationnels. Rappelons en quelques mots en quoi consiste la méthode de la coupure[6]. Tout nombre rationnel a permet de diviser l'ensemble de tous les nombres rationnels en deux classes A_1 et A_2 de façon que tout nombre de A_1 soit plus petit que tout nombre de A_2. Le nombre a est alors tel qu'il est soit le plus grand nombre de A_1, soit le plus petit de A_2. A proprement parler, donc, le nombre a engendré une coupure, ou plutôt deux (on peut indifféremment le considérer comme le plus grand nombre de A_1 ou le plus petit de A_2), qui ne sont pas, selon l'expression de Dedekind, «essentiellement différentes». Mais on peut aussi engendrer une seule coupure (A_1, A_2) qui n'est engendrée par aucun nombre rationnel. Par exemple, celle qui est engendrée par le nombre entier d tel que :

$$n^2 < d < (n + 1)^2$$

en une suite infinie strictement croissante de nombres rationnels strictement inférieurs à $\sqrt{d}$ et en une suite infinie strictement décroissante de nombres rationnels strictement supérieurs à $\sqrt{d}$. Ainsi est «créé» un nombre irrationnel, de façon rigoureusement analytique, que l'on peut considérer comme entièrement défini par cette coupure (A_1, A_2). Et à tout nombre irrationnel correspond une coupure unique. Dès lors, on peut énoncer la propriété de continuité en disant que si l'on partage l'ensemble des nombres réels (par opposition à : complexes) en deux classes A_1 et A_2 de façon que, quel que soit $a_1 \in A_1$ et quel que soit $a_2 \in A_2$, on a $a_1 < a_2$, alors il existe un nombre a unique qui engendre cette partition. Propriété qui est équivalente à cet important théorème de l'analyse selon lequel toute suite croissante majorée (respectivement : décroissante minorée) admet une limite.

On comprend ainsi qu'il y a une infinité de nombres irrationnels (puisqu'il y a une infinité de coupures), mais qu'il faut le recours à la dénombrabilité infinie (par les nombres naturels) des équations algébriques pour établir leur infinité dénombrable : obtenus par passage à la limite, à l'infini, ils sont *hétérogènes* aux nombres rationnels. La suite croissante et convergente majorée des nombres rationnels peut aller aussi loin que l'on veut, et indexée, de cette manière, par des nombres naturels (par exemple : a_{11}, a_{12}, ... a_{1n}, ...), jamais on n'y trouvera le nombre irrationnel. A l'égard des entiers naturels qui ordonnent les éléments de la suite, il faut trouver, pour indexer le nombre irrationnel, un autre nombre qui soit, par rapport à 1, 2, ..., n, ..., leur borne supérieure ne leur appartenant pas. Telle est en fait la raison

pour laquelle Cantor introduit, dès 1883, un tel nombre qu'il désigne par ω, le nombre immédiatement plus grand que tous les nombres naturels[7], et qui, par additions de l'unité ($\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., $\omega + n$, ...) et multiplications (ω^2, ..., ω^n, ...), permet d'engendrer la suite ordonnée des ordinaux transfinis. Mais correspondant au mode de génération des irrationnels, ces ordinaux ne dénoteront jamais que des ensembles eux-mêmes dénombrables. La procédure du passage à la limite paraît légitime dès lors que l'on retrouve encore, malgré l'hétérogénéité qu'elle introduit eu égard aux suites ordonnées infinies de rationnels, le même «genre» d'infinité dénombrable. Car s'il y a paradoxe dans le continu, il paraît ne devoir relever que du paradoxe de l'infini (l'équipotence d'un ensemble à l'une de ses parties propres) : c'est toujours le même infini qui se rencontre dans l'infiniment petit (dans l'égalisation et la proximité toujours croissante des éléments de la suite des rationnels à l'égard de leur limite irrationnelle), et dans l'infiniment grand (de la suite N des naturels). Mais le problème est déjà qu'il est par exemple impossible de trouver, par construction, le plus petit des rationnels positifs, comme le plus petit des irrationnels positifs. D'où la nécessité de trouver un moyen de les ordonner, et de créer pour ces derniers, des nombres ordinaux transfinis.

La question la plus irréductible surgit cependant avec les nombres transcendants (par exemple : π, e) qui ne sont et ne peuvent êtres racines d'aucune équation algébrique. Et la suspicion se lève sur le procédé de passage à la limite quand on voit Cantor définir en 1874, les nombres transcendants par un tel procédé. Cela pose explicitement, nous allons nous en expliquer, *le problème du continu*, dont on sait qu'il n'est toujours pas résolu aujourd'hui, et dont il y a de bonnes raisons de penser qu'il ne le sera jamais. Dans une étude intitulée «*Sur une propriété de la collection de tous les nombres réels algébriques*»[8], Cantor montre d'abord que l'ensemble de tous les nombres réels algébriques (racines réelles d'équations algébriques : il s'agit des entiers naturels, des rationnels et des irrationnels) est dénombrable — le procédé de dénombrement étant une bijection entre les entiers naturels et les équations algébriques. Il établit ensuite l'existence de nombres transcendants, par le procédé de la coupure.

Soit la suite infinie de nombres réels algébriques distincts les uns des autres :

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots \quad (1)$$

Il y a dans tout intervalle donné ($\alpha \ldots \beta$) un nombre η (et par voie de conséquence une infinité de tels nombres) qui ne se trouve pas dans cette suite. Soit en effet un intervalle ($\alpha \ldots \beta$) quelconque où $\alpha < \beta$. Les deux premiers nombres de la suite (1) qui se trouvent à l'intérieur de cet intervalle (à l'exception de α et β) peuvent être désignés par α' et β', et soit $\alpha' < \beta'$. On désigne de la même manière par α'' et β'' les deux premiers nombres de la suite (1) qui se trouvent à l'intérieur de l'intervalle (α' ... β'), et on constitue selon la même loi les intervalles (α'' ... β''), (α''' ... β'''), etc. Selon la définition, α', α'', ... sont des nombres déterminés de la suite (1), dont les indices croissent constamment, et de même pour β', β'', ... Les intervalles (α ... β), (α' ... β'), (α'' ... β''), ... sont successivement emboîtés les uns dans les autres.

Deux cas peuvent se présenter. Ou bien le nombre des intervalles ainsi constitués est fini, et soit ($\alpha^{(\nu)}$ ... $\beta^{(\nu)}$) le dernier d'entre eux. Du fait qu'il y a tout au plus un nombre de la suite (1) qui peut s'y trouver, alors on peut admettre qu'il y a un nombre η dans cet intervalle qui n'est pas contenu dans la suite (1), et le théorème est démontré. Ou bien le nombre des intervalles ainsi constitués est infini; alors les nombres α, α', α'', ... constituent une suite croissante majorée dont la limite est α^{∞}; la même chose vaut des nombres, β, β', β'', ... qui constituent une suite décroissante minorée dont la limite est β^{∞}. Si $\alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$, alors $\eta = \alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ ne peut être contenu dans la suite (1), car s'il l'était, on aurait $\eta = \omega_p$, où p serait un indice déterminé, ce qui n'est pas possible puisque ω_p ne se trouve pas à l'intérieur de l'intervalle ($\alpha^{(p)}$ ... $\beta^{(p)}$), alors que le nombre η s'y trouve bien par définition. Si $\alpha^{\infty} < \beta^{\infty}$, alors le nombre η qui se trouve à l'intérieur de l'intervalle (α^{∞} ... β^{∞}) ou à sa limite remplit bien la condition de ne pas être contenu dans la suite (1).

Cantor termine son étude en indiquant que dans tout intervalle (α ... β) compris entre deux nombres algébriques, il y a une infinité non dénombrable de nombres réels non algébriques. Ces nombres, *hétérogènes* aux nombres algébriques (puisqu'ils s'obtiennent par passage à la limite, selon le procédé de la coupure) sont les nombres transcendants et leur ensemble n'est pas dénombrable, du moins par les moyens offerts par la suite infinie N des entiers naturels.

Du moins faut-il le présumer. Car sans entrer dans une discussion logique et critique détaillée de la démonstration cantorienne, on s'aperçoit qu'elle pose deux difficultés, liées au fait que ce mode de définition des nombres transcendants par rapport aux nombres réels algébriques est le même que celui des irrationnels par rapport aux rationnels. La première est que la définition des irrationnels par la coupure ne fournit pas, à moins d'une pétition de principe, de moyen *intrinsèque* pour leur dénombrement. Il faut, pour démontrer leur infinité dénombrable, recourir à l'ensemble des équations algébriques, ou, ce qui revient en fait au même, à leur définition par une coupure du type

$$n^2 < d < (n + 1)^2$$

ou plus généralement du type

$$n^\alpha < d < (n + 1)^\alpha$$

où d est un entier naturel et où α prend les valeurs 2, 3, ... n, ... Rien n'indique, autrement dit, *en général*, quel type déterminé de nombre (irrationnel ou transcendant) constitue la limite vers laquelle tend une suite de nombres rationnels, à moins de la déterminer *a priori* en déterminant d'avance la coupure. Autrement dit encore, il se pourrait que la limite fût *a priori* indéterminée, ce que tend à montrer le fait qu'il y a toujours une infinité de nombres transcendants dans le voisinage d'un nombre réel algébrique déterminé. Par là, c'est bien l'un des fondements de l'analyse qui se trouve mis en question, puisque c'est l'*indéterminité a priori* du *continu arithmétique* qui vient en évidence. Pour les mathématiciens, cela signifie que l'analyse reste vague ou fluente tant qu'une axiomatique ne vient pas «résoudre» cette difficulté d'un point de vue formel[9].

La seconde difficulté tient au fait que cette définition de nombres hétérogènes par la méthode de la coupure peut se poursuivre à l'infini, pour peu que l'on ait mis au point des procédés de «dénombrement» dans le transfini, en particulier un procédé de «dénombrement» transfini pour les nombres transcendants. Telle est en fait l'*intuition centrale de Cantor*, mais elle conduit alors à l'*inépuisabilité indéfinie* du *continu arithmétique*, à des infinis actuels de plus en plus «abondants» (en raison des puissances qui leur reviennent, et qui définissent des classes de nombres ordinaux transfinis), indéfiniment plongés dans un infini potentiel lui-même inépuisable. Il n'y a pas de limite au continu qui constitue la ressource infinie (au sens de l'*apeiron*) de «calculer» des ensembles de nombres actuellement infinis et toujours plus abondants. Il y a une sorte de prolifération infinie des transfinis cantoriens toujours plus riches depuis une profusion elle-même indéfinie et infatigable. Qui met le doigt dans l'étagement à l'infini des transfinis voit surgir une source qui se gonfle indéfiniment pour boucher tous les interstices pensables. Etrange métaphysique qui, dans sa grandeur même, dans l'inouïe audace de sa conception, est proche de la «folie», d'une sorte de délire qui ne nous intéresse que dans la mesure où il est, en un sens très profond, celui de la Raison mathématique elle-même. Il y a différentes espèces de nombres dont il faut rendre compte le plus rigoureusement possible, donc... La grandeur de Cantor fut de concevoir une telle chose, et sa «folie» fut sans doute, par sa création de la théorie des ensembles, de vouloir à toute force la fonder mathématiquement. «Folie» d'un héros en un sens innocent, et qui dut inéluctablement se mesurer à la tragédie de l'échec (en 1899, où celui-ci est implicitement reconnu, dans trois lettres à Dedekind)[10]. «Folie» qui sera «assagie» et raisonnée dès 1908, par Zermelo, avec la première axiomatique de la théorie des ensembles, avant que n'en viennent d'autres. Désormais, il s'agira, comme nous le disions, de «gérer la crise».

Ce que la théorie des nombres montre en effet, c'est que la création cantorienne de la théorie des ensembles est «naturelle»: l'arithmétisation des fondements de l'analyse (le continu arithmétique et les passages à la limite) y conduit tout naturellement. Mais c'est pour rencontrer, on le sait, d'inextricables difficultés logiques, mais aussi, nous avons voulu l'indiquer, philosophiques. Voyons, en quelques traits, cette «naturalité» («intuitivité» ou «naïveté» disent les logiciens) de la création cantorienne, et reportons-nous, pour cela, à sa première étude véritablement fondatrice, qui date de 1883: *Fondements d'une théorie générale des ensembles*[11].

Soit la suite N des entiers naturels 1, 2, 3, ..., n, ... Dans cette suite, le nombre n exprime un nombre fini déterminé d'itérations successives (ordinal) aussi bien que la réunion en un tout (cardinal) des éléments posés. Si l'on considère la suite N actuellement infinie (position du transfini, qui suppose la définition univoque de la suite N, ce qui pose, nous l'avons vu, des problèmes insolubles), son cardinal est actuellement infini mais, en raison de cette actualité, bien défini (il s'agit de $\aleph_0$, cardinal de l'infini dénombrable), même si, parmi tous les nombres de la suite N, il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres. Or, dit Cantor, il n'y a rien de choquant à considérer que, malgré cela, il existe un nombre ordinal transfini ω qui sert à exprimer que la suite N tout entière est donnée conformément à sa loi, dans sa succession naturelle, et qu'en ce sens, il est la *limite* vers laquelle tendent les nombres n (ou sa borne supérieure, non comprise dans N). Il est évident que le cardinal de ω est encore $\aleph_0$. De cette manière, ω est *hétérogène*, comme un irrationnel eu égard aux rationnels, par rapport aux entiers naturels.

De la sorte, il est aisé, poursuit Cantor, d'engendrer (premier principe d'engendrement) la suite des ordinaux transfinis:

$$\omega + 1, \omega + 2, \dots \omega + n, \dots \quad (1)$$

Il suffit pour cela de considérer qu'ils sont les nombres ordinaux des ensembles bien ordonnés:

$\{2, 3, \dots, n, n+1, \dots, 1\}$
$\{3, 4, \dots, n, n+1, \dots, 1, 2\}$, etc.

Mais il n'y a pas de raison de s'arrêter puisque la suite (1) elle-même converge vers $2\,\omega$ qui est l'ordinal transfini de l'ensemble bien ordonné (deuxième principe d'engendrement):

$$\{1, 3, \dots 2n-1, 2n-1, \dots, 2, 4, \dots 2n-2, 2n, \dots\}$$

Et il va de soi que le cardinal transfini de tous ces nombres est encore $\aleph_0$. L'application combinée des deux principes d'engendrement permet de poursuivre:

$3\,\omega, 3\,\omega + 1, \dots 3\,\omega + n, \dots$
....
$m\,\omega, m\,\omega + 1, \dots m\,\omega + n, \dots$
....

Chacun de ces nombres a encore la puissance (cardinal) $\aleph_0$. Par application du second principe d'engendrement (qui correspond à un second passage à la limite), la suite de ces ordinaux converge elle-même vers le nombre ω^2 qui a en fait la puissance $\aleph_0{}^2 = \aleph_0$. Dès lors, en appliquant les deux principes d'engendrement, on parvient à des nombres de la forme:

$$\nu_0\,\omega^m + \nu_1\,\omega^{m-1} \dots + \nu_{m-1}\,\omega + \nu_m \quad (2)$$

qui ont toujours la puissance $\aleph_0$.

Mais qu'advient-il si nous considérons *tous* les nombres ordinaux transfinis ainsi créés, c'est-à-dire si nous considérons la limite supérieure de la suite ordonnée des nombres de la forme (2), à savoir, par le second principe d'engendrement, l'ordinal ω^ω? A-t-il encore un cardinal égal à $\aleph_0$? La réponse, devenue classique, est non: l'ensemble de tous les ordinaux transfinis ainsi créés n'est *pas dénombrable* par les moyens de la suite N actuellement infinie, et à supposer qu'il constitue lui-même un ensemble, ce qui, nous allons le voir, est le point en question, son cardinal transfini est posé par Cantor comme égal à $\aleph_1$, le *premier* cardinal transfini *succédant* à $\aleph_0$ (c'est la conjecture cantorienne du *continu*). Nous disposons donc là, pour le calcul des infinis actuels, de ce que Cantor désigne par «principe d'arrêt ou de limitation».

On s'aperçoit aussitôt que, si la création des ordinaux transfinis de la première classe (de cardinalité $\aleph_0$) correspond à l'ambition de «compter» les nombres irrationnels, la création, qui ne peut manquer de s'ensuivre de la construction, des ordinaux transfinis de la seconde classe (de cardinalité $\aleph_1$), correspond à l'ambition de «compter» les nombres transcendants. En outre, que, moyennant les deux principes d'engendrement et le principe de limitation, la voie est ouverte pour engendrer des classes de nombres transfinis de plus en plus abondantes, ce qui permet une élégante formulation, en termes mathématiques, de l'intuition de la surabondance indéfinie propre au continu arithmétique: les passages à la limite par emboîtements successifs sont désormais réglés par des passages à la limite dans des suites ordonnées de nombres ordinaux transfinis. Le rêve cantorien (le «paradis cantorien» disait Hilbert) de calculer les infinis paraît réalisable.

Et pourtant, il ne le paraît qu'à la mesure du «réalisme» mathématique de Cantor, de sa croyance en apparence inébranlable en l'existence objective (indépendante de l'esprit humain) des nombres, des nombres naturels, rationnels, irrationnels, transcendants. Aucune suspicion logique chez lui: celle-ci viendra après, quand l'effort cantorien de fondation de la théorie se révélera un irréductible échec; quand, pour sauver l'essentiel, il faudra élaguer, couper les branches trop dangereuses car trop manifestement «métaphysiques» et paradoxales. Ce sera l'œuvre des mathématiciens (depuis Zermelo) et des logiciens (depuis Russell) de notre temps. Car s'il est bien une chose que montre le tragique (et grandiose) échec de la «naïveté» cantorienne, c'est que la Raison mathématique, poussée sur sa pente naturelle, entre, comme aurait dit Kant, «en conflit avec elle-même», qu'elle fabrique des «illusions» d'objets, et que, si elle veut les éviter, elle est conduite, peu ou prou, à se faire «hara-kiri». L'empire de la rationalité n'est qu'un mirage, il n'existe nulle part (à moins de le poser, par hypothèse, dans un entendement divin qui nous serait à jamais inaccessible), et la grande découverte du XXᵉ siècle est peut-être que la rationalité n'est que lacunaire, incomplète, relative, et finalement, si elle se veut conséquente avec elle-même, tautologique (Wittgenstein), donc aussi nominaliste (que ce soit dans le formalisme ou le constructivisme logico-mathématiques).

Prise radicalement, la Raison ne fait que balbutier la tautologie de manière plus ou moins complexe ou subtile. Mais faut-il la prendre radicalement? Nous ne le pensons pas, car nous pensons que l'astreindre aux strictes contraintes de la consistance logique formelle revient à anémier et mécaniser la pensée. C'est là, en outre, un enjeu grave de notre temps, où la réalité humaine, dans toute son inépuisable et indéterminable richesse, est trop souvent contrainte, au nom d'on ne sait quels impératifs, à se plier aux exigences fantasmatiques (irrationnelles) d'une rationalité stricto sensu, le plus souvent défaillante dans sa définition même, c'est-à-dire dans son auto-compréhension.

Nous reprendrons donc, ici, l'œuvre de Cantor en philosophes, attentifs, non pas seulement à la cohérence logique formelle, mais à la cohésion d'un *sens* qui excède toute logique et tout système logique. Sens nécessairement humain en ce qu'il a d'irréductible, c'est-à-dire aussi sens philosophique, ou si le mot n'était galvaudé ou déprécié, sens métaphysique au vrai sens du terme. Sens en tout cas du véritable créateur, qu'il soit mathématicien, physicien, artiste... ou philosophe. C'est dans ce contexte précis que nous allons engager une critique philosophique de la preuve par laquelle Cantor a pensé établir, sur la base de sa croyance au transfini dénombrable, l'existence du transfini non dénombrable, à savoir de l'argument, célèbre, et central pour toute l'aventure logico-mathématique de notre temps[12], dit de la «diagonale». Nous voudrions montrer, par des raisons philosophiques, que cet argument, en fait, ne prouve rien, et qu'il est pris, lui aussi, par le cercle vicieux d'une pétition de principe pourtant nécessaire (l'acte de foi constitutif du transfini dénombrable comme d'un infini actuel), c'est-à-dire par ce que nous désignons, à la suite de Kant, par une illusion transcendantale (l'illusion nécessaire à l'exercice de la mathématique, puisque nécessaire à la théorie des nombres, selon laquelle l'infini dénombrable existe *a priori*). Nous montrerons dans une autre étude[13] en quoi cette illusion transcendantale, propre à la «Raison mathématique», est coextensive d'une antinomie quasi ou hyper-kantienne, de la même forme que la première antinomie kantienne de la Raison pure.

2. Discussion philosophique de l'argument de la diagonale: l'illusion transcendantale cantorienne

L'argument de la diagonale est la démonstration du théorème dit de Cantor, selon lequel le cardinal d'un ensemble est strictement inférieur au cardinal de l'ensemble de ses parties. Avant d'entrer dans son exposé et sa discussion, donnons d'abord les définitions cantoriennes canoniques de l'ensemble, du cardinal d'un ensemble et de son ordinal, et mesurons bien les enjeux de l'énoncé du théorème.

Les définitions, tirées de son dernier écrit publié (en 1895: il s'agit des *Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre*), dénotent bien la permanence de son «réalisme mathématique»:

«Par 'ensemble' (*Menge*) nous entendons toute réunion (*Zusammenfassung*) M d'objets déterminés et bien distincts m de notre intuition (*Anschauung*) ou de notre pensée (lesquels sont nommés les 'éléments' de M) en un tout (*zu einem Ganzen*)»[14].

L'ensemble est donc réunion M en un tout: expression équivoque puisqu'elle définit du même coup la réunion (la loi de constitution) et le tout (le concept, l'idée), sans que l'on sache laquelle de ces deux notions dépend de l'autre, si l'ensemble M est la réunion plutôt que le tout. Et cette réunion est celle d'*objets déterminés* et bien *distincts* (déterminés par quoi?), c'est-à-dire d'objets pleinement *individués* (selon quelle loi?), de notre intuition (de quel type?) ou de notre pensée (s'agit-il d'objets purement intellectuels?). Cela signifie en tout cas que l'individuation des éléments est si complète que nous les voyons (dans l'intuition ou la pensée) *distinctement*, comme individus discrets, chacun univoquement défini en son identité à soi et sa non-identité aux autres (comme, par exemple, les nombres).

«Nous nommons 'puissance' ou 'nombre cardinal' le concept général qui, avec l'aide de notre faculté de pensée active, procède de l'ensemble M par là qu'il est fait abstraction de la constitution de ses différents éléments m et de l'ordre de leur être-donné.»

Ce résultat est désigné symboliquement par $\overline{\overline{M}}$, et Cantor ajoute cette remarque capitale:

«Du fait que tout élément singulier m, si l'on fait abstraction de sa constitution, devient un «un», le nombre cardinal $\overline{\overline{M}}$ est lui-même un ensemble déterminé composé de simples uns, qui existe en tant qu'image intellectuelle ou projection de l'ensemble donné M dans notre esprit»[15].

Suit enfin une définition de l'équivalence entre deux ensembles M et N, ainsi que de l'auto-équivalence d'un ensemble à lui-même, qui permet de constituer le cardinal comme classe d'équivalence puisque deux ensembles équivalents ont même nombre cardinal: $(M \sim N) \rightarrow (\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}})$.

Puisque nous avons ici une définition complète, la plus claire que Cantor nous ait livrée, réfléchissons sur elle en prenant en compte la note critique de Zermelo[16]. Tout d'abord, le *cardinal* est lui-même un *ensemble doublement abstrait*, c'est-à-dire un ensemble composé de simples *unités* prises *indépendamment* de leur ordre de présentation, et de leur constitution particulière, dans M. Cet ensemble abstrait est ensuite une image intellectuelle de M, abstraite de M par la projection, qui ne laisse pour ainsi dire de M que sa trace $\overline{\overline{M}}$. Par là même, l'ensemble abstrait $\overline{\overline{M}}$ est équivalent à M, puisque la projection en question est en réalité une application qui est une bijection faisant correspondre, à tout élément singulier de M, un élément abstrait de $\overline{\overline{M}}$. Le cardinal de M est, en d'autres termes, une représentation abstraite de M, qui procède de la réflexion de l'ensemble M en tant qu'ensemble, c'est-à-dire en tant que tout constitué d'entités tout à fait individuées (des «uns») qui ne sont donc pas, en particulier, des nombres — et par là, rien de la suite N n'est en apparence présupposé. Mais, comme le laisse entendre Zermelo dans sa note critique, la question est de savoir en quoi ce n'est pas l'ensemble $\overline{\overline{M}}$ qui définit finalement M comme tel ensemble particulier, puisque la définition de $\overline{\overline{M}}$ présuppose celle de l'équivalence entre ensembles (la double abstraction présuppose la bijection) — puisque, du point de vue mathématique, la définition de l'équivalence est moins forte que la définition de la puissance, et qu'à ce titre, la puissance apparaît comme le concept commun à des ensembles équivalents, l'équivalence constituant, dès lors, la première étape de la double abstraction, comme chez Frege la définition du concept «équinumérique au concept F».

Il doit certes en aller ainsi en toute rigueur. Mais ne perd-on pas par là toute une part importante de ce que Cantor veut dire, à savoir tout d'abord que cela permet d'éviter la présupposition de la suite N, ensuite que le concept de *puissance* est un *concept réflexif*, procédant d'une *abstraction réfléchissante* ou d'une réflexion abstractive de l'ensemble M, en laquelle, pour ainsi dire, l'ensemble M *se réfléchit* dans son *image* $\overline{\overline{M}}$, de manière à s'identifier à soi comme ensemble M concret (avec des éléments ayant une constitution particulière et un ordre déterminé), et à se différencier de sa trace abstraite $\overline{\overline{M}}$? Autrement dit, du point de vue de la *constitution transcendantale*, cette double opération de la pensée (de la faculté active de penser, dit Cantor) n'est-elle pas elle-même préalable à la *reconnaissance* de l'équivalence, en tant qu'elle en constituerait la condition de possibilité *a priori*? La bijection ne suppose-t-elle pas déjà que l'on fasse abstraction de la constitution particulière des éléments et de l'ordre dans lequel ils se présentent? Adresser le reproche de Zermelo à Cantor, n'est-ce pas reprocher à celui-ci d'être encore trop philosophe et pas assez logicien ou mathématicien? Bornons-nous, ici, simplement à poser la question.

Les définitions du type d'ordre et du nombre ordinal, que nous donnons brièvement, soulèvent les mêmes difficultés que celle de la puissance. Pour

un ensemble M simplement ordonné[17], le type d'ordre, désigné symboliquement par $\overline{M}$, est «le concept général qui résulte de M si nous faisons abstraction de la constitution des éléments m, mais conservons le rang qu'ils ont entre eux». Par là même, «$\overline{M}$ est *lui-même un ensemble ordonné*, dont les éléments sont de simples uns qui ont entre eux le même rang que les éléments correspondant de M dont ils ont procédé par abstraction»[18]. Pour un ensemble M bien ordonné[19], son type d'ordre est ce qu'on désigne par nombre ordinal[20]: on trouve donc la présupposition de l'ordre et du bon ordre sur un ensemble, dont le type d'ordre et le nombre ordinal sont tout simplement la réflexion au sein d'ensembles *simplement abstraits* (on ne fait abstraction que de la constitution particulière des éléments); ces définitions, et cette abstraction réfléchissante simple ne font que découvrir ou réfléchir ce qui est toujours déjà donné *a priori* avec un ensemble M quelconque.

Soit un ensemble E, et soit P (E) l'ensemble de ses parties. Le théorème dit de Cantor énonce:

$$\overline{\overline{P\ (E)}} > \overline{\overline{E}}$$

Qu'est-ce que cela signifie si la puissance de E est celle de l'infini dénombrable (de cardinalité $\aleph_0$)? Que l'ensemble des parties, finies et infinies de E (en particulier l'ensemble des ordinaux, finis et infinis construits à partir de ω jusqu'à leur borne supérieure) n'est *pas dénombrable* par les moyens de E infini dénombrable. Qu'il existe donc un dénombrable d'un ordre supérieur (de cardinalité $\aleph_1$), et même, selon la conjecture cantorienne du continu (jamais démontrée et très vraisemblablement indémontrable)[21], d'un ordre *immédiatement* supérieur, ce qui permettrait d'engendrer la suite infinie de cardinaux transfinis[22]:

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \ldots\ \aleph_\omega,\ \ldots$$

L'enjeu du théorème pour la légitimité de la création cantorienne est donc tout à fait capital. Or, nous allons le voir, sa démonstration ne se tient, dans le cas où E a la puissance du transfini dénombrable de cardinalité $\aleph_0$, que sur le véritable acte de foi qui en est constitutif.

Penchons-nous donc à présent sur la structure logique de cette démonstration et pour cela, reprenons la version simplifiée de l'argument que donne, par exemple, J. Ladrière[23]. L'hypothèse que nous désignerons dans la suite hypothèse H, est qu'il y a une correspondance biunivoque entre les éléments a de E et les éléments correspondants P_a de P(E), P_a étant, en tant qu'élément de P(E), un certain sous-ensemble de E. Moyennant l'hypothèse H, les éléments de E se répartissent en deux classes I et II exclusives selon que a appartient ou n'appartient pas au P_a qui lui correspond dans la bijection. On forme alors l'ensemble D *diagonal* de la manière suivante: un élément n de E *appartient* à D si et seulement si n *n'appartient pas* à P_n. Etant ainsi constitué de tels éléments de E, D est un sous-ensemble de E et donc un élément de P(E). En vertu de l'hypothèse H, il doit exister un élément d de E tel que D soit identique à P_d. La question est alors de savoir si d appartient à D ou pas. Si d appartient à D, alors, par définition de D, d n'appartient pas à D, et si d n'appartient pas à D, alors, toujours par définition de D, d appartient à D — c'est-à-dire que l'appartenance de d à D implique sa non-appartenance à D et que, réciproquement, la non-appartenance de d à D implique son appartenance à D, ce qui est une contradiction manifeste, devant nous conduire à rejeter l'hypothèse H. Or, puisque les éléments de E peuvent être mis en correspondance biunivoque avec des parties de P(E), il s'ensuit que P(E) a une puissance supérieure à celle de E. Comme le souligne fort bien Ladrière, le point essentiel de la démonstration réside dans la formation de la proposition «d appartient à D», car c'est elle qui engendre la contradiction puisque son affirmation implique sa négation, et que sa négation implique son affirmation.

Analysons maintenant la démonstration point par point. La *première étape* consiste dans l'énoncé de l'hypothèse H, c'est-à-dire dans la supposition de ce qu'on va précisément démontrer comme impossible, à savoir le fait qu'on puisse trouver un moyen d'établir une bijection entre les éléments de E et les éléments de P(E), ou le fait que cette bijection existe *a priori*. Or, si nous y réfléchissons, faire cette hypothèse, c'est supposer que E *soit l'ensemble*, non seulement de ses éléments individués, mais encore de *tous ses sous-ensembles*, à savoir *l'ensemble de tous les ensembles inclus en lui-même*, ce qui veut dire que l'on considère E sous un double point de vue : à la fois comme *ensemble d'éléments uniques et singuliers* et comme *ensemble d'ensembles*. Tout se passe donc, dans l'hypothèse H, comme si E était à la fois le Tout de ses éléments et le Tout de toutes les totalités possibles de ses éléments : c'est à ce seul titre qu'on peut établir une bijection entre ses éléments et les totalités possibles, mais partielles, de ses éléments. Et c'est finalement *ce double point de vue* qui s'avèrera *impossible*. Si nous raisonnons maintenant avec l'ensemble E *infini dénombrable*, cela signifierait que celui-ci serait *absolu* ou *inconditionné* (au sens kantien) puisque susceptible de pouvoir définir, par lui seul, la totalité des ensembles partiels formés de manière quelconque à partir de ses éléments, en sorte que, sans être lui-même l'un de ses éléments, ce Tout infini dénombrable serait comme une *instance ultime* de la théorie des ensembles, caractérisable par son cardinal $\aleph_0$ qui serait le même que le cardinal du Tout des totalités partielles d'éléments qu'il contient. L'ensemble E serait donc la totalité de toutes les totalités partielles qu'il contient, il serait *l'ensemble de tous les ensembles contenus en lui* — et l'on voit que l'on est déjà fort près du célèbre paradoxe cantorien de l'ensemble de tous les ensembles.

Dans la *seconde étape*, on constitue, moyennant l'hypothèse H qui donne précisément la possibilité d'épuiser dans une bijection avec les éléments de P(E), les éléments de l'ensemble E, donc aussi l'infini dénombrable, les classes I et II exclusives d'éléments a de E, selon que, dans la bijection, a appartient ou non au P_a qui lui correspond. On suppose donc la bijection épuisée, et par là, en fait, *tous les* P_a *connus*, de telle sorte que l'on puisse effectuer ce classement. Remarquons que P_a reçoit son nom de l'élément E avec lequel il est mis en correspondance, et que cette seconde étape n'a de sens que si nous admettons que l'infini dénombrable constitue *un* ensemble de cardinalité $\aleph_0$. Dans le cas de l'ensemble E infini, par conséquent, *l'hypothèse* H *est coextensive de l'hypothèse du transfini*, du moins du premier transfini, celui qui rassemble en un tout unique le dénombrable, la preuve revenant à dire que, si l'on admet un premier transfini de cardinalité $\aleph_0$, il faut en admettre un deuxième, et ainsi de suite, dans ce qui peut dès lors servir à constituer la suite des cardinaux transfinis — si du moins l'on admet que le non-dénombrable dont l'existence s'établit à partir du dénombrable constitue lui aussi *un* ensemble, et ainsi de suite.

Dans la *troisième étape*, on construit l'ensemble diagonal D, formé, en réalité, des éléments de E appartenant à la classe II, c'est-à-dire des éléments n qui ne *se retrouvent pas*, moyennant la bijection, dans l'ensemble P_n qui leur correspond. Dire que D constitue un ensemble, c'est dire qu'il est possible, en principe, de reconnaître *tous* les éléments n qui le constituent comme éléments bien distincts, bien individués; c'est donc supposer que la classe II peut être exhaustivement constituée, ce qui, toujours, est cohérent avec l'hypothèse H. On en arrive ainsi à la conclusion que, moyennant l'hypothèse H, D étant un sous-ensemble de E, doit lui-même être repris dans la bijection, c'est-à-dire être un élément de P(E) auquel est associé un élément d, par suite être un P_d, identifiable par l'élément d qui lui est associé par la bijection. Donc, on doit avoir $D = P_d$.

La *quatrième étape* constitue le nerf de la preuve, puisque c'est en elle que s'engendre le paradoxe ou la contradiction, résidant dans le fait que l'élément d associé à D appartient à la fois à la classe I et à la classe II, c'est-à-dire aussi bien, puisque ces deux classes sont exclusives, n'appartient ni à l'une ni à l'autre. En effet, si d appartient à D, cela veut dire qu'il appartiendrait au P_d avec lequel D est identique, ce qui est contraire à la définition de D, donc il n'appartient pas à D. Mais si d n'appartient pas à D, donc au P_d avec lequel D est identique, alors on respecte bien une partie de la définition de D (en tant que $D = P_d$ auquel est associé un élément qui ne s'y retrouve pas), mais pas l'autre puisque, dans ce cas, d doit justement appartenir à D, par définition, donc d appartient à D. Il en résulte que D est construit de telle sorte qu'aucun élément d ne peut lui être associé par la bijection, donc que l'élément diagonal est nécessairement l'*excédentaire* par rapport à celle-ci, puisque le supposé élément d avec lequel il est en bijection moyennant l'hypothèse H ne peut être un élément de E, et que, dès lors, $D \neq P_d$, c'est-à-dire est inidentifiable par un élément d de E, alors même que $D \subset E$ ou que $D \in P(E)$. L'ensemble ou l'élément diagonal est donc *réflexif* en ce sens que, construit par le moyen de la bijection, il permet de faire jouer la bijection *dans l'autre sens* (dans l'identification de D comme P_d), de la réfléchir pour montrer que, s'il lui correspond un élément d de E, cet élément appartient à D et n'appartient pas à D, c'est-à-dire aussi, tout autant, dans le cadre de l'hypothèse H, appartient à E et n'appartient pas à E, l'ensemble diagonal exhibant donc un paradoxe ou une contradiction en tant qu'il exhibe littéralement l'élément d de E comme un *élément fantôme ou non identique à soi* puisque caractérisé par des propriétés en soi contradictoires (appartenance et non-appartenance à D). Ce qui se traduit aussi bien pour D, qui doit être un P_d si la bijection épuise tous les P_i [tous les ensembles-parties inclus dans E, et éléments de P (E)], et ne peut l'être puisque s'il l'était, il en résulterait une contradiction, en sorte qu'on peut encore dire que D est une sorte de réflexion de P(E) = $\{P_i\}$ en lui-même[24] puisqu'il suffit à lui seul à montrer qu'il y a au moins un ensemble élément de P(E) qui ne peut être un P_i à moins de contradiction — *il y a au moins un ensemble-partie* E qui *ne peut être identifié* par un élément de E qui pourrait lui être associé, car à supposer qu'il existe un tel élément, cet événement serait non identique à soi, fantôme, menteur, c'est-à-dire *introuvable* dans le cadre de la théorie des ensembles. Et c'est parce que cet ensemble (D) est *inidentifiable* par le moyen d'un élément d de E qu'il ne peut être corrélé dans la bijection, donc qu'il *désigne* un infini non dénombrable.

Reprenons les choses d'encore plus près et tâchons d'amorcer une réflexion critique transcendantale. Si E est à la fois l'ensemble dénombrable de ses éléments singuliers et individués et l'ensemble de tous les ensembles possibles inclus dans E, il n'y a pas plus de totalité d'éléments contenue en lui que d'éléments, c'est-à-dire que E constitue, en ce sens, un Tout absolu ou inconditionné. Mais comme les totalités de E sont *a priori* quelconques, il doit bien y avoir, moyennant la bijection entre les éléments de E et les totalités partielles d'éléments de E, des éléments e_I de E tels que ces e_I se retrouvent dans les Pe_I correspondants, et des éléments e_{II} de E tels qu'ils ne se retrouvent pas dans les Pe_{II} correspondants. Si l'on forme alors l'ensemble D des éléments e_{II} de E, on constitue en fait une *partition de* E, et par là même, par la médiation de la bijection, une *partition de* P(E), ou plutôt, puisque D est constitué d'éléments de E, une *réflexion* de P(E) en les Pe et *l'un de ses supposés éléments* (D = P_d) en tant que D est un sous-ensemble de E, défini par le fait que l'élément de E qui est censé lui correspondre moyennant l'hypothèse H *ne* lui appartient *pas*. La contradiction vient alors de ce que, D étant supposé *représentatif*, moyennant la bijection, d'un élément d de E, cet élément d, en vertu de la définition de D, doit être à la fois contenu dans D et non contenu dans D, donc peut être caractérisé par deux propriétés *contradictoires*, ce qui le rend *non identique à soi*, indistinct, par conséquent *inexistant en tant qu'élément de l'ensemble* E.

Quel est donc le nerf, ou l'origine de la contradiction? L'ensemble diagonal D, qui est un élément de P(E), doit être un P_d en vertu de l'hypothèse H, c'est-à-dire un sous-ensemble de E *identifiable* par un élément d de E qui lui correspond en tant qu'il est un P_d. Mais l'ensemble diagonal est construit de telle manière qu'il engendre la contradiction, donc l'absurdité de l'hypothèse H: les éléments de E qui le constituent, c'est-à-dire les e_{II}, sont tels qu'ils ne se retrouvent pas dans les Pe_{II} correspondants, et par conséquent, s'il est corrélé par la bijection à un élément d de E, cet élément lui appartient dans la mesure où il ne lui appartient pas en tant que P_d, et ne lui appartient pas en tant qu'il lui appartient en tant que D. Donc la contradiction vient de ce que l'on pense pouvoir *identifier* D comme P_d, le corréler par la bijection avec un élément *et un seul* de E. Car tout est finalement là: dans l'infini dénombrable (sans fin), il se pourrait toujours que, dans la suite itérative de la bijection, un élément d de E permette finalement d'identifier D comme P_d (par une extension de l'intuition à la base du paradoxe de Richard en tant qu'il réfute l'argument de la diagonale)[25]. Cela signifie que D est en réalité *inidentifiable* par le moyen de la *bijection* avec tous les éléments de E, *impossible à individuer par ce moyen*, c'est-à-dire, si E est infini dénombrable (de cardinalité $\aleph_0$), non dénombrable. Par suite, la contradiction vient de ce que l'on considère l'ensemble ou l'élément diagonal à la fois comme *une partie de* E et comme *une partie identifiable* de E — identifiable par le moyen de la bijection, puisqu'il est certes identifiable par sa définition (tout comme dans le paradoxe de Richard). La conséquence en est, bien entendu, que si E est bien le Tout de ses éléments singuliers et individués, il ne peut être le Tout (l'ensemble) des totalités (ensembles) quelconques qui peuvent être formées à partir de ses éléments, parce que, *avec* E, *on ne dispose pas du moyen d'identifier ou d'individuer toutes ses parties*, qui constituent, du moins intuitivement, un nouveau Tout, P(E) qui inclut strictement E, toute la question étant de savoir si l'on peut rassembler en une collection *unique* toutes les parties de l'ensemble E, c'est-à-dire de savoir si les parties de E peuvent constituer *un* ensemble P(E). Il en résulte en tout cas que E comme totalité d'éléments individués, ou comme totalité *unique* du dénombrable, *ne constitue pas un Tout inconditionné* ou *absolu* puisqu'il se révèle incapable d'identifier, avec les moyens qu'il met à notre disposition, l'ensemble D diagonal.

Reprenons donc les choses sous cet angle, où le raisonnement diagonal apparaît comme l'exhibition de l'impossibilité d'individuer l'élément diagonal par le moyen d'*un* et d'*un seul* des éléments de l'ensemble E. Si nous nommons *autoréflexion parfaite* du Tout (de l'ensemble E) la réflexion de *chacun* de ses éléments dans *une* totalité et une *seule* formée à partir de ces éléments (dans $e_i \longleftrightarrow P_i$, avec P(E) = $\{P_i\}$), alors il vient que cette autoréflexion parfaite du Tout est ce qui est seul susceptible de constituer le Tout comme *absolu* ou *inconditionné*. L'hypothèse H est donc l'hypothèse de l'autoréflexion parfaite du Tout dans le Tout de ses parties. C'est moyennant cette hypothèse qu'on peut constituer les classes I et II comme exclusives. La classe I est constituée d'éléments e_I de E tels que, moyennant la réflexion parfaite, e_I soit élément du Pe_I en lequel il se réfléchit: ce qui signifie que e_I se *reconnaît* dans Pe_I comme étant l'un de ses éléments, ou que *l'appartenance* d'un élément e de E à la classe des e_I est *conditionnée par son appartenance* à Pe_I. Ou encore, ce qui signifie que e_I se *reconnaît* dans son *image* ou sa *représentation* Pe_I. Par là même, il faut toujours déjà que e_I soit identifié comme élément de E pour se reconnaître comme élément de son image Pe_I. Ce qui est caractéristique, ici, par rapport à la définition de la classe II, c'est qu'il n'entre, dans la définition de la classe I, *aucune négation*: l'appartenance de e à $\{e_I\}$ est conditionnée par l'appartenance de e à Pe_I, c'est-à-dire à son image. Les choses se compliquent si nous examinons la définition des e_{II}. Un élément e de E n'appartient à l'ensemble des e_{II} que s'il *ne* se reconnaît *pas* dans son image Pe_{II}, c'est-à-dire s'il se réfléchit comme *absent* des éléments de Pe_{II}. Or, il ne peut se réfléchir comme absent de son image Pe_{II} que s'il s'est tout d'abord réfléchi comme présent, c'est-à-dire comme élément de E susceptible d'être un e_I ou un e_{II} moyennant sa réflexion dans les P_e. Ce qui signifie que l'*appartenance* de e à $\{e_{II}\}$ est *conditionnée* par sa *non-appartenance* à son image Pe_{II}, ou que e_{II} est coextensif de sa représentation (Pe_{II}) d'où il est pourtant absent. Tout vient finalement de ce que le *représentant* Pe_{II} de e_{II} est *représentatif* de e_{II} en tant que e_{II} en est absent, c'est-à-dire absent de Pe_{II} en tant que représentant. Donc, tout vient de ce que Pe_{II} est déjà lui-même *réflexif* puisqu'il est chargé de réfléchir les éléments de E qui sont *absents de lui-même*, ce qui n'est bien sûr possible que si, toujours déjà, tous les éléments de E ont été reconnus, réfléchis ou *identifiés* par leur réflexion dans les éléments de P(E) — ce en quoi consiste l'hypothèse H que l'on va démontrer absurde.

Toute la difficulté est que, dès lors, puisque les Pe_{II} sont chargés de réfléchir les e_{II} qui sont *absents d'eux-mêmes*, tout e_{II} correspondant à un Pe_{II} est *a priori indéterminé*, sinon justement qu'il ne peut pas être l'un des éléments de Pe_{II}: les e_{II}, en tant qu'on les considère depuis les Pe_{II}, sont tous les éléments de E qui ne figurent pas dans les Pe_{II} qui leur correspondent, et donc, par là, l'attribution d'un e_{II} à un Pe_{II} comporte toujours une irréductible part *d'arbitraire*, alors même que ce n'est pas le cas pour l'attribution d'un e_I à un Pe_I — il suffit que ce soit l'un des éléments de Pe_I, et la part d'arbitraire y est beaucoup plus limitée puisqu'on dispose d'un ensemble bien défini de choix pour un e_I, ce pourquoi il est beaucoup plus aisé de constituer la classe I, puisqu'il suffit de préciser que parmi l'ensemble bien défini de choix, il faut prendre *un seul choix*. Considère-t-on, à présent, l'ensemble D diagonal, constitué par les e_{II}, on s'aperçoit alors que, vu sa construction, cet ensemble ne peut être réfléchi sur un des éléments de l'ensemble E puisqu'il ne peut être ni un Pe_I (dans la mesure où, s'il l'était, les e_{II} ne seraient pas des e_{II}, c'est-à-dire des éléments qui doivent tous être

différents de leur image supposée possible en E), ni être un Pe_{II} (puisque, s'il l'était, à nouveau, les e_{II} ne seraient pas des e_{II} en tant que l'un d'entre eux (l'élément d fantôme) a la propriété d'être un élément menteur)[illegible]: l'ensemble D est donc un ensemble *irreprésentable* par un élément de E (puisque cet élément, s'il existe, est menteur) ou plutôt, puisqu'il est néanmoins défini comme l'ensemble de tous les e_{II}, il est *la représentation de l'impossibilité de sa représentation par un élément de* E, ce qui veut dire que, *eu égard* à E, ou plutôt *aux moyens de représentation des* P_e *de* P(E) par les éléments de E, *l'ensemble* diagonal ne peut être que *radicalement indéterminé*; tout ce qu'on sait de lui, c'est qu'il est un sous-ensemble (une partie) d'éléments *relativement arbitraires* de E, l'arbitraire étant relativisé par la constitution de la classe I en tant qu'exclusive de la classe II.

Tâchons de comprendre cette étrange situation de manière plus approfondie. D'après ce que nous venons de dire, l'ensemble des e_{II} ne peut manifestement être constitué — indépendamment de l'ordre des e_{II} qui dépend de la manière relativement arbitraire dont la bijection peut être établie — que si l'ensemble des e_I est supposé pouvoir être épuisé par la bijection, ce qui est une autre forme de l'hypothèse H. Or, telle est la médiation, l'ensemble des e_{II} est l'ensemble D diagonal. L'argument de la diagonale consiste à *faire jouer la réflexivité en sens inverse* du sens qui a servi à constituer les e_{II}, c'est-à-dire à se demander si cet ensemble est identifiable par les moyens de la bijection avec les éléments de E. Selon l'hypothèse H, l'ensemble D doit être un P_d, et selon le raisonnement, cette identification de D à P_d est absurde. Pour le montrer, en effet, on suppose que D est un P_d, c'est-à-dire un ensemble identifiable par le moyen de la bijection avec un élément d de E. Comme D est constitué d'éléments e_{II}, c'est-à-dire d'éléments de E dont on dispose qui sont absents de leur Pe_{II} correspondant, donc qui n'appartiennent pas à leur Pe_{II} correspondant, *réciproquement*, l'élément de E qui correspond à un Pe_{II} *dont on dispose* ne peut être l'un de ses éléments. Or *D est constitué de telle manière qu'il engendre la contradiction*, dès lors tout au moins qu'on se demande si D est un Pe_I ou un Pe_{II}: s'il est un Pe_I, cela signifie que d est un e_I, donc que d appartient à D; or D n'est constitué que d'éléments e_{II}, donc d ne peut être un e_I mais doit être un e_{II}; par conséquent d ne peut appartenir à D et D ne peut être un Pe_I, donc il doit être un Pe_{II}; mais s'il est un Pe_{II}, cela signifie que d est un e_{II}, donc que d ne peut pas appartenir à D; or D est précisément constitué de tels éléments e_{II} donc doit contenir d; par suite D ne peut pas être un Pe_{II} mais un Pe_I, et ainsi de suite dans le cercle qui renvoie de l'une à l'autre possibilité alors même que l'un et l'autre sont impossibles parce que contradictoires en soi. Autrement dit, D est un ensemble tel que s'il se réfléchit en un élément d de E qui est à la fois l'un de ses éléments, alors il *n*'est *pas* l'ensemble D qui a été construit, et que, s'il se réfléchit en un élément d de E qui *n*'est *pas* l'un de ses éléments, alors cet élément doit lui appartenir. En d'autres termes, cette réflexion en sens inverse fait apparaître *un élément* d *de* E *qui* *n'est reconnaissable en* D *qu'en tant qu'il en est absent et qui n'est absent de* D *qu'en tant qu'il y est reconnaissable.* Cet élément qui joue entre la présence et l'absence n'existe donc pas, ou plutôt, il n'existe qu'en tant qu'il n'existe pas, c'est la *fiction nécessaire* qui découle de l'hypothèse H. L'argument consiste donc à montrer que l'hypothèse H doit être abandonnée en tant qu'elle engendre un élément d de E qui est une pure fiction, une *pure apparence d'élément de* E qui est telle que *si elle apparaît en* D *(coordonnée par la bijection), elle doit en disparaître, et que si elle disparaît en* D *elle doit y apparaître.* L'élément d a donc *tous les caractères de l'illusion transcendantale*, puisque son apparence se réduit à l'imminence de son apparition tout autant qu'à l'imminence de sa disparition, donc puisque son apparence se réduit à son imminence dont la réalisation seule conduit à la *double contradiction*, selon qu'elle est poussée dans le sens de l'apparition ou dans le sens de la disparition. Et comme cette fiction nécessaire est une conséquence de l'hypothèse H, on voit que, si elle est illusion transcendantale, elle révèle du même coup l'hypothèse H comme illusion transcendantale, à savoir comme l'illusion transcendantale du fait qu'un ensemble E d'éléments soit du même coup ensemble de tous les ensembles constitués à partir de ces éléments, par conséquent comme *l'illusion transcendantale que l'ensemble* E, et par suite *l'ensemble infini dénombrable soit un infini absolu ou inconditionné*: c'est donc le concept d'un ensemble comme ensemble de tous les ensembles *contenus* en lui en même temps qu'ensemble de ses éléments qui est une illusion transcendantale, liée à l'intuition d'un ensemble, engendrant l'élément d comme illusion transcendantale[27].

Il nous reste donc à voir comment, par la *double réflexion réversible* des éléments de E dans les éléments de P(E) s'engendre l'élément d comme véritable illusion transcendantale, donc à exercer notre réflexion critique-transcendantale sur l'argument de la diagonale. Selon sa structure logique, l'argument montre que l'hypothèse H de l'autoréflexion absolue de E sur P(E) engendre une absurdité: car cette hypothèse rend possible la constitution de *l'ensemble diagonal qui représente*, nous l'avons dit, l'*irreprésentable par les moyens représentatifs de* E (par la bijection qui ferait de D un P_d). Ce paradoxe est donc bien que l'hypothèse de l'autoréflexion absolue *nous permet de nous représenter l'ensemble* D *par une construction*, constitué d'éléments de E (les e_{II}), *qui est pourtant irreprésentable* par les moyens représentatifs de E. N'est-ce pas dès lors cet ensemble D lui-même qui est *illusion transcendantale, en tant justement qu'il est la représentation de l'irreprésentable*, c'est-à-dire *l'apparence de ce qui ne peut avoir d'existence* par les seuls moyens de l'ensemble E? Et apparence qui ne surgit que de l'hypothèse H dont la démonstration par l'absurde montre précisément que ce n'était qu'une fiction, c'est-à-dire aussi une pure apparence transcendantale ne correspondant à rien de «réel» (dans le cadre de la théorie), mais engendrée seulement, comme on a coutume de le dire, par les moyens

«naïfs» de l'intuition, à savoir l'illusion transcendantale de l'autoréflexion absolue des éléments de E dans chacun des sous-ensembles de E (ce qui n'est pas a priori absurde du point de vue de l'infini)? Mais si tel est le cas, ne pourrait-on pas dire, en ce qui concerne tout au moins le transfini (puisque la démonstration est évidente dans le cas du fini), que si l'on pose par hypothèse que l'infini dénombrable constitue un ensemble, l'ensemble des parties de cet ensemble, à savoir P(E), n'est lui-même qu'une fiction ou une illusion transcendantale, et cela, en tant que, nous l'avons vu, D serait lui-même une illusion transcendantale représentative d'une infinité non dénombrable d'ordres différents, différenciés chaque fois par l'arbitraire de la bijection? Bref, ce que Cantor nommera en 1899 une *multiplicité inconsistante*? Car D est précisément représenté par les moyens du dénombrable pour montrer qu'il ne représente, en réalité, que l'irreprésentable par les moyens du dénombrable — c'est seule la fiction de l'hypothèse H qui permet de l'engendrer, et nous voyons que le raisonnement s'écroule, précisément si on abandonne cette hypothèse H, puisque les classes I et II ne sont plus, alors, nécessairement exclusives, puisque, donc, le caractère fantomatique de l'élément d dans l'hypothèse H se répercute sur le caractère fantomatique des éléments e_{II}, par suite puisque l'ensemble D ne pourrait plus, alors, être constitué que d'éléments fantomatiques, seulement présents en E en tant qu'absents des P_e repris dans la bijection. On nous dira, à juste titre d'un point de vue mathématique, que par ce que nous venons de dire, nous privilégions indûment *l'infini dénombrable* comme seul susceptible de pouvoir constituer des ensembles, ou que nous posons en vérité l'infini dénombrable comme un *inconditionné eu égard à ce qui permet de constituer des ensembles*, et qu'il n'y a, à cela, aucune raison intrinsèquement mathématique comme le montre la nécessité de la création cantorienne. Mais nous rétorquons à ce genre d'argument que la création cantorienne, l'arithmétique du transfini (la suite des cardinaux transfinis et des classes de nombres ordinaux transfinis) résulte d'un *véritable acte de foi* (ou de l'illusion transcendantale en un sens déjà quasi kantien: c'est l'illusion de la déterminité actuelle de l'infini qui permet d'engendrer la suite déterminée univoquement du dénombrable): d'une extension des pouvoirs de notre esprit, qui est certes géniale, au-delà des limites de l'actuellement nombrable, et par là, d'une *position du transfini* qui n'est pas critiquée de l'intérieur, qui n'est contrôlée par aucune instance critique, comme le montre bien, justement, l'argument de la diagonale, puisque, *si l'on abandonne l'hypothèse* H, comme la démonstration nous conduit précisément à le faire, *il devient impossible de constituer l'ensemble diagonal* en tant que celui-ci ne serait plus constitué que d'éléments fantômes ne pouvant surgir pour l'esprit que si celui-ci *postule* de lui-même qu'il peut épuiser le dénombrable, ou tout au moins le définir strictement par des moyens logiques et axiomatiques (ce qui est rendu définitivement impossible par le théorème de Löwenheim-Skolem). Tout ce que l'argument montre, c'est que, si l'on fait la pétition de principe qu'il existe l'ensemble infini dénombrable, cet ensemble n'est pas inconditionné ou absolu parce qu'il est nécessairement inclus dans un ensemble «plus grand» qui pourra, en principe, être caractérisé par une bijection entre ses éléments et la multiplicité des ordinaux transfinis qui leur correspondent, et ainsi de suite (constitution des différentes classes de nombres transfinis) puisqu'il n'y a plus, dès lors, aucune raison de s'arrêter — le transfini engendrant indéfiniment de lui-même le transfini, ce que Cantor voulait justement démontrer. Il s'avère alors bien que l'infini dénombrable n'est pas un absolu, mais un *relatif*, un transfini relatif à tous les autres appelés à s'emboîter indéfiniment les uns dans les autres, de proche en proche, dans des totalités de plus en plus infinies, si le mot est possible. Mais alors, *si l'on considère déjà que l'hypothèse* H *est une fiction transcendantale*, non pas en tant qu'elle suppose une autoréflexion absolue de E dans P(E), mais *en tant simplement qu'elle suppose une autoréflexion absolue du dénombrable en lui-même (puisqu'il faut épuiser tous les éléments de* E), toute *l'arithmétique transfinie* n'est-elle autre chose qu'une *sorte d'arithmétique de l'illusion transcendantale, où, indéfiniment, l'illusion transcendantale engendrerait de l'illusion transcendantale?* Et ce, pour finalement se révéler telle dans les paradoxes ou antinomies de la théorie cantorienne du transfini.

Le paradoxe de l'hypothèse H *est qu'elle permet de représenter* D *comme ensemble irreprésentable par l'autoréflexion absolue de* E *dans* P(E). C'est donc l'autoréflexion absolue de E dans P(E) qui permet de représenter l'ensemble D diagonal comme irreprésentable au sein même de cette autoréflexion absolue. Là est la contradiction que l'argument de la diagonale exhibe rigoureusement par les moyens de la logique. Examinons-la de plus près encore, et tâchons d'en tirer les conséquences en ce qui concerne les différents modes de rejet de l'hypothèse H. Tout vient, en réalité, de ce que l'hypothèse H est *utilisée deux fois: une première fois* pour constituer les deux classes I et II exclusives, et donc pour constituer l'ensemble D diagonal, *une seconde fois* pour affirmer que cet ensemble D diagonal doit être un P_d, c'est-à-dire un sous-ensemble de E repris dans la bijection. Toute la question du rejet de l'hypothèse H vient du fait que c'est en réalité sa seconde utilisation qui est réfutée: D ne peut être un P_d. Certes, par là même, la première utilisation l'est aussi. Mais l'hypothèse H est en réalité une hypothèse plus complexe qu'il n'y paraît: en supposant établie la bijection entre E et P(E), elle suppose, dans son application au transfini, qu'une bijection puisse être établie entre l'ensemble infini dénombrable et un autre ensemble de même puissance, donc que l'on puisse épuiser par elle *tous* les éléments sans exception de l'infini dénombrable — ce qui est la présupposition du transfini de cardinalité $\aleph_0$ —, et elle suppose, *par surcroît* (seconde partie de l'hypothèse H), que les P_e représentés par cette bijection ne sont pas tous des Pe_I, donc que l'ensemble des e_I est inclus dans l'ensemble E — car il le faut pour qu'il y ait au moins un e_{II} nécessaire pour constituer l'ensemble diagonal, et par là, la contradiction. Or cette seconde partie de

l'hypothèse H n'est en réalité pas justifiée, sinon «intuitivement», et si elle était fausse, si $\{Pe_I\}$ était de même puissance que E, si tous les éléments e de E étaient des e_I, il serait impossible de construire l'ensemble diagonal D, puisque, nous le voyons, les classes I et II ne seraient plus, dès lors, exclusives, puisque un e_{II} trouvé au fil de la mise en correspondance biunivoque pourrait fort bien se révéler, plus tard selon le même fil, être un e_I[28]. Or, quand nous disons que c'est la seconde *application* de l'hypothèse H qui est réfutée, ce que nous disons en réalité, c'est que c'est cette deuxième *partie* de l'hypothèse H qui pourrait seule, être réfutée: il n'y aurait pas d'ensemble diagonal, susceptible d'engendrer la contradiction, car il n'y aurait pas, dans E, d'éléments e_{II} pouvant le constituer — et le soupçon est accru si nous remarquons que le caractère de e_{II} est justement d'être présent en E s'il est *absent* du Pe_{II} qui est censé lui correspondre, et présent, c'est-à-dire reconnaissable en E. Mais, si nous écrivons ceci au conditionnel, c'est que nous savons que cette interprétation ne va pas elle-même sans une présupposition: celle que l'infini dénombrable est *inépuisable*, c'est-à-dire en réalité *indéfini*, ou, dans le langage cantorien, *inconsistant*, donc que l'infini dénombrable ne peut pas lui-même être considéré comme un ensemble, puisque dans la suite infinie du dénombrable, et dans la suite infinie des couples d'éléments de E et de P(E) que constitue la bijection, il sera toujours possible, en vertu de cette infinité toujours *déterminable* ou infiniment inépuisable, de trouver qu'un élément de E paraissant tout d'abord comme un e_{II} se révèlera, dans la suite inépuisable, être un e_I. Sinon, il y a nécessairement des e_{II}, mais *intuitivement*, étant donné qu'il y en a déjà nécessairement dans le cas où E est un *ensemble fini*, donc *en considérant l'ensemble infini dénombrable comme s'il était un ensemble fini*, c'est-à-dire *entièrement déterminé*, en sorte que c'est cette *détermination* qui permet de se *représenter* l'ensemble D diagonal comme ensemble *irreprésentable* dans la bijection. N'y a-t-il pas quelque part une contradiction entre cette hypothèse de la détermination complète de l'infini dénombrable et le fait qu'elle permette d'engendrer un ensemble D impliquant contradiction? N'y a-t-il pas, en quelque sorte, propagation de la contradiction? Qu'est-ce qui est véritablement à rejeter dans l'hypothèse H? Son absurdité démontrée par l'argument ne doit-elle pas au moins nous faire envisager la possibilité que l'infini dénombrable ne puisse, précisément, être complètement déterminé? Et n'est-ce pas cette possibilité que Richard envisage dans l'exposé de son paradoxe? Quel serait, ici, l'équivalent de cet exposé? Sinon précisément qu'il serait impossible de savoir si un élément e de E est un e_I ou un e_{II} tant que l'ensemble E des e *et* l'ensemble P(E) des P_e n'est pas supposé *épuisé* par la bijection, et que, dans la mesure où l'argument diagonal montre précisément que si l'ensemble E peut être épuisé, l'ensemble P(E) ne peut l'être, il sera toujours possible de trouver un P_e non repris dans l'énumération, et par là même, de lui associer, dans le cas de l'infini dénombrable, un élément de E différent de tous les autres; mais c'est cette possibilité même qui est niée par *l'hypothèse de la détermination complète de l'infini* *dénombrable* (telle est, en réalité, la partie de l'hypothèse H qui n'est pas rejetée par la démonstration de Cantor, qui prouve en fait, quant au transfini : s'il y a de l'infini dénombrable de cardinalité $\aleph_0$, alors il existe un infini qui, s'il a un cardinal, est de puissance immédiatement supérieure). C'est cette négation qui permet donc d'engendrer la contradiction à partir de $D = P_d$, et donc la nécessité d'envisager d, non plus comme un élément de E, de l'infini dénombrable, mais comme un élément à vrai dire différent de tous les éléments de E, et d'une tout autre nature. Il en résulte que *c'est le paradoxe du théorème de Cantor* (qu'on retrouvera *mutatis mutandis* au cœur du théorème de Löwenheim-Skolem) *que la détermination complète de l'infini dénombrable permet de constituer un ensemble irreprésentable* D *par les moyens de l'infini dénombrable* (par la bijection autoréflexive). C'est dire que *Cantor ne rejette que la seconde application de l'hypothèse* H tout en gardant la première, alors même, nous l'avons vu, que l'on pourrait, comme Richard, la rejeter en bloc, dans ses deux applications, mais au prix de l'inconsistance de l'ensemble infini dénombrable — et ce sera le génie de Gödel de reprendre sur nouveaux frais, avec les moyens du langage formel et de l'arithmétisation des formules, le paradoxe de Richard, pour ne rejeter de l'hypothèse H que sa seconde application, puisque, son théorème montrant qu'il est toujours possible de construire, par les moyens de la syntaxe d'un système formel, une proposition indécidable dans le système, il montre en réalité qu'il existe dans le système des propositions faisant partie de l'infini dénombrable, énonçant quelque chose «d'irreprésentable» dans le système, puisque susceptible ni de la validité ni de la non-validité, mais qui peut seulement être «représenté» en de tels termes dans un méta-système plus large et plus fort.

En conséquence, *l'ensemble diagonal* D *ne peut être déterminé que si l'on suppose l'ensemble* E *entièrement déterminé, et déterminé en ses parties comme un ensemble de parties irreprésentable par les moyens de la détermination complète de* E que suppose la bijection. *Mais l'ensemble diagonal* D *reste indéterminé si l'ensemble* E *n'est pas un ensemble*, ou est une multiplicité inconsistante, *et alors il est simplement radicalement irreprésentable*, parce qu'il n'y a plus aucun moyen possible de représentation dans l'infini, ou, ce qui revient au même, parce que l'infini n'est qu'une illusion transcendantale, une pure apparence de l'intuition ne correspondant à aucune apparition vraie dans l'intuition, en tant que l'infini ne correspondrait qu'à l'illusion transcendantale nécessaire d'un *a priori* en réalité irreprésentable. Mais il ne semble pas que nous puissions trouver, ici, de règle *critique* transcendantale permettant de régler un «bon usage», garanti de toute illusion, de la raison mathématique[9]. *Ou bien* on admet, par l'*acte de foi* cantorien, la réalité du transfini, *ou bien* on ne l'admet pas, se disant, pour paraphraser l'expression de Hilbert, que le paradis cantorien dépasse décidément trop les possibilités humaines, liées au temps, donc au rythme nécessaire de l'itération que suppose l'établissement de la bijection, et qu'il faudrait pouvoir disposer d'un temps infini pour vérifier les propositions concernant le transfini. Mais ce serait, comme l'aurait dit Cantor, limiter abusivement la liberté de l'imagination mathématique, et par là, perdre toutes les possibilités, très riches, de l'arithmétique du transfini. Et puis, il y a les nombres...

On pourrait encore réagir autrement, et c'est ainsi que nous avons tendance à le faire, du moins provisoirement, en disant que si l'infini dénombrable pris comme ensemble est une illusion transcendantale le faisant justement paraître comme un ensemble, il y a une *logique* dans cette illusion transcendantale puisqu'elle en fait paraître d'autres, et tout d'abord l'illusion transcendantale faisant paraître l'infini non dénombrable au fil de la suite des cardinaux transfinis et des classes de nombres correspondantes, comme si l'*a priori*, ainsi représenté illusoirement, c'est-à-dire par une *extrapolation non critique des pouvoirs de l'esprit humain*, avait par là le pouvoir de *se stratifier en feuillets* ou en illusions transcendantales se renvoyant l'une l'autre, selon le même processus contenu dans l'argument diagonal, *à l'infini, de réflexion en réflexion dans une sorte d'abîme*. L'aporie...

NOTES

1 On lira, en langue française : J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Hermann, Coll. «Histoire de la pensée», Paris, 1962; P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Vrin, Coll. «L'histoire des Sciences», Paris, 1976.

2 Cf. J. Ladrière, *Les limitations internes des formalismes*, Nauwelaerts, Gauthier-Villars, Louvain, Paris, 1957. Et : *Les limites de la formalisation*, Encyclopédie de la Pléiade, Logique et connaissance scientifique, Gallimard, Paris, 1967, pp. 312-333.

3 J. Ladrière, *op. cit.*

4 Nous avons traité en détail de ces deux questions. Pour Frege, dans *L'hérédité et les nombres*, *La liberté de l'esprit*, n° 4, Balland, Paris, 1983, pp. 77-137. Pour Dedekind dans notre *IVe Recherche phénoménologique*, in *Recherches phénoménologiques, IV, V* (2e vol.), Ousia, Bruxelles, 1983, pp. 12-109.

5 Cf. par exemple, C.S. Kleene, *Logique mathématique*, Armand Colin, Coll. «U», trad. J. Largeault, Paris, 1971, pp. 183-188.

6 Pour un exposé rigoureux, cf. P. Dugac, *op. cit.*, pp. 35-47.

7 Cf. J. Cavaillès, *op. cit.*, p. 87, note 2, qui cite une lettre, tout à fait explicite sur ce point, de Cantor à Lasswitz (du 15 février 1884).

8 Publiée in G. Cantor, *Abhandlungem mathematischen und philosophischen Inhalts*, Georg Olms, Hildesheim, 1966, pp. 115-118. La preuve s'étend sans difficulté pour tous les nombres algébriques, réels et complexes (voir note de Zermelo, *ibid.*, p. 118).

9 Cf. par exemple A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, North-Holland Pub. Co, Amsterdam, 1966.

[10] Publiées en français in J. Cavaillès, *op. cit.*, pp. 238-246. Nous traitons de la première d'entre elles dans une étude à paraître dans les *Etudes phénoménologiques*, Ousia, Bruxelles, 1986.
[11] Publiée en français (tr. de J.C. Milner) dans les *Cahiers pour l'analyse*, n° 10, Seuil, Paris, pp. 35-52. Pour le texte allemand, cf. G. Cantor, *op. cit.*, pp. 165-209.
[12] Cf. l'exposé lumineux de J. Ladrière, *Les limites de la formalisation, art. cit.* On y verra très clairement le lien entre l'argument de la diagonale et les paradoxes connus de la logique.
[13] Partant d'une critique philosophique de la lettre de Cantor à Dedekind du 28 juillet 1899. A paraître dans les *Etudes phénoménologiques*, Ousia, Bruxelles, 1986, sous le titre: *Une antinomie quasi-kantienne dans la fondation cantorienne de la théorie des ensembles.*
[14] G. Cantor, *op. cit.*, p. 282.
[15] *Ibid.*, p. 283.
[16] *Ibid.*, p. 351.
[17] *Ibid.*, p. 296. C'est un ensemble pour lequel il n'y a pas de premier élément.
[18] *Ibid.*, p. 297.
[19] *Ibid.*, p. 312. C'est un ensemble pour lequel il existe un premier élément.
[20] *Ibid.*, pp. 320-321.
[21] Cf. J. Cavaillès, *op. cit.*, pp. 253-274 (*Transfini et continu*), ainsi que le travail déjà devenu classique de P.J. Cohen, *Set theory and the Continuum Hypothesis*, W.A. Benjamin, New York et Amsterdam, 1966.
[22] Ce que fait Cantor dans sa lettre à Dedekind du 28 juillet 1899 (publiée en français in J. Cavaillès, *op. cit.*, pp. 238-244).
[23] J. Ladrière, *Les limites de la formalisation*, art. cit., p. 325.
[24] Cf. J. Ladrière in *Cahiers pour l'Analyse*, n° 10, Seuil, Paris, 1969, p. 127.
[25] C'est un paradoxe célèbre, dont s'est inspiré Gödel pour la démonstration de son théorème non moins célèbre, et publié en 1905 dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* (republié dans les *Acta mathematica* en 1906). On en lira une traduction anglaise aisément disponible dans le recueil de J. Van Heijenoort, *From Frege to Gödel, A source Book in mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1971, pp. 142-144. Mais invoquer ici le raisonnement de Richard comme nous le faisons revient en fait à contester la légitimité de la création cantorienne, c'est-à-dire à contester que l'infini dénombrable soit *actuel* ou constitutif d'un *ensemble* au sens cantorien. Nous allons y revenir, mais nous voyons déjà que toute la difficulté réside dans les moyens logiques dont nous disposons pour déterminer univoquement le dénombrable, que Cantor suppose *a priori*.
[26] C'est-à-dire d'engendrer la contradiction: $[(d \in D) \supset (d \notin d)]. [(d \notin d) \supset (d \notin D)]$ qui est de la forme: $(p \supset \sim p) . (\sim p \supset p)$.
[27] Nous entendons «illusion transcendantale» au sens que nous avons explicité dans nos *Recherches phénoménologiques* (1er vol., Ousia, Bruxelles, 1981, 2e vol., Ousia, Bruxelles, 1983). Cf. en particulier notre IVe *Recherche* consacrée à Dedekind. Nous montrons, dans notre étude à paraître dans les *Etudes phénoménologiques*, que cette illusion transcendantale est aussi une illusion transcendantale au sens kantien.
[28] En généralisant l'intuition de Richard: il suffirait de réaménager la bijection au fur et à mesure, de manière que tel e_{II} pourrait toujours se révéler plus tard être un e_I.
[29] Comme l'a tenté l'école «intuitionniste» qui, par une conception kantienne, sans doute trop «orthodoxe», des mathématiques, a abouti à la «réforme» que l'on sait, c'est-à-dire à la création d'une «mathématique intuitionniste», en réalité «constructiviste».