UNE ANTINOMIE QUASI-KANTIENNE DANS LA FONDATION CANTORIENNE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

§ 1 *Introduction.*

L'un des problèmes fondamentaux de la physique moderne est le rapport qui *s'institue* en elle entre l'expression mathématique de ses théories et le supposé "réel" physique qui doit en constituer la référence objective. Nul doute que ce rapport ne soit extrêmement subtil et complexe, au point que les tentatives de Husserl (dans la *Krisis*) et de Heidegger (notamment dans *Die Frage nach dem Ding*) sur la question ne peuvent, tout au plus, qu'être considérées comme des préliminaires, certes extrêmement riches, mais ne donnant de la "chose" qu'une sorte de vue de loin, une ébauche des contours. Contrairement à ce que toute une tradition déjà instituée voudrait nous faire penser, l'épistémologie phénoménologique ne fait peut-être que commencer. Mais il faut alors, précisément, abandonner nos certitudes, et tout d'abord nous demander quel est le sens d'être de la mathématique, ne serait-ce déjà que pour préciser davantage quel sens d'être est coextensif *du* mathématique au sens où l'entend Heidegger [1].

Que le mathématique soit, pour ainsi dire, l'*a priori*, c'est ce que l'on pourrait concéder plus ou moins aisément si cela n'impliquait déjà, d'une certaine manière, l'idéal d'une coïncidence avec soi de l'*a priori*, qui est constitutif, on le sait, de toute une métaphysique — celle dite de la subjectivité que l'on ne retrouve peut-être pas tant chez Descartes ou

1. *Qu'est-ce qu'une chose?*, tr. fr. par J. Reboul et J. Taminiaux, Gallimard, Paris, 1971, pp. 81 - 88.

Husserl que chez Hegel. Kant, déjà, avait montré, dans la *Dialectique transcendantale*, que l'adéquation à soi de l'*a priori* est une illusion transcendantale indestructible de l'esprit humain. Mais il ne l'a montré, en quelque sorte, qu'à l'intérieur de sa "doctrine de la science", dans le cas, précisément où l'*a priori* paraît, en tant que tel, comme "puissance de génération" de phénomènes, et c'est pourquoi la première antinomie de la Raison pure, entre l'infinité actuelle et la finitude du monde, est une antinomie *cosmologique*. Kant continue de penser que la mathématique résulte, quant à son fond, de la construction du concept *(a priori)* dans l'intuition pure *(a priori)*. Nulle méfiance, chez lui, quant au fait que pareille construction pourrait à son tour engendrer des illusions — la mathématique du XIXe siècle n'est pas encore là, et en particulier la réflexion, par les mathématiciens, des fondements de l'analyse et de la théorie des nombres[2]. Nulle prescience, pour ainsi dire *a fortiori*, de ce que la reprise "orthodoxe" de sa doctrine allait conduire, avec les "intuitionnistes" du XXe siècle, à une "réforme" de la mathématique, voire même à la création d'une nouvelle mathématique.

Certes, nous ne faisons pas à Kant le reproche absurde de ne pas avoir été "omniscient". Personne ne l'est. Mais ce que nous voudrions montrer ici, c'est que, pour autant, il serait pour le moins hâtif ou stupide de considérer l'œuvre kantienne comme "dépassée". Les deux premières antinomies de la Raison pure ont ceci de caractéristique qu'elles concernent le statut physique, donc "objectif", que l'on doit, d'un point de vue critique, attribuer à l'infini (infiniment grand et infiniment petit), et c'est à trois siècles de métaphysique moderne (depuis Nicolas de Cues et Giordano

2. Cf. notre étude *De l'illusion transcendantale dans la théorie cantorienne des ensembles* (§ 1), parue dans les *Annales de l'Institut de Philosophie de l'ULB*, Éditions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles, 1986.

Bruno jusqu'à Leibniz et aux "leibniziens") qu'elles mettent fin. Mais c'est aussi, pour peu qu'on soit attentif, le rapport, demeuré non interrogé avant lui, entre l'analyse mathématique (calcul différentiel et intégral) et le réel physique, qu' elles interrogent.

Notre objet est en effet de montrer, ici, que la première antinomie de la Raison pure n'est pas tant, dans ses profondeurs, une antinomie qui concerne la cosmologie, qu'une antinomie qui concerne l'infini (l'infiniment grand) actuel. Nous allons le voir en construisant une antinomie "quasi-kantienne", de même structure, à propos de la tentative cantorienne (qui a échoué) de fonder mathématiquement le *continu arithmétique*. Si l'infiniment grand actuel, et, corrélativement, le continu ,procèdent d'une illusion transcendantale, alors qu'en est-il de l'analyse, et de la théorie des nombres dont elle a besoin, pour peu qu'on n'évacue pas subtilement les difficultés dans des axiomatiques et des formalisations *ad hoc?* Et que fait-on au juste quand on écrit une équation différentielle en physique et qu'on l'intègre (en introduisant des conditions aux limites qui sont le plus souvent des conditions à l'infini) ? Problème trop vaste, immense, auquel nous ne prétendons pas apporter de réponse. Mais problème qu'il faut poser, puisqu'il se pose déjà en mathématiques, puisque la contruction dans l'intuition "pure" doit se méfier d'elle-même dès qu'elle approche l'infini, c'est-à-dire, en fait, pratiquement, dès le commencement (d'où le "recommencement" intuitionniste) ; ou puisque l'"intuition" d'un objet mathématique peut déjà être une illusion (transcendantale) d'intuition — ce qui justifie, au moins "techniquement", le projet axiomatique et formaliste, même eu égard aux théorèmes de limitation bien connus.

Nous pensons cependant que le "nominalisme" logico-mathématique qui s'en remet aux mécanismes transparents des systèmes formels est, pour le philosophe, une solution de paresse. Car, à moins d'une sorte de hara-kiri de la pensée, on ne peut soutenir, sans plus, qu'il n'y a rien d'autre dans le langage mathématique que ce qui est strictement réglé par la sémantique formalisée d'un système logique-formel. Pour nous, la mathématique se réfère à quelque chose que, visiblement, *elle ne maîtrise pas*. L'*a priori* est finalement aussi opaque que l'*a posteriori*, et si les nombres existent, si, quelque part, nous les savons toujours déjà, nous ne savons pas ce qu'ils sont, et peut-être, dans certains cas, ne sont-ils que des illusions nécessaires de notre esprit, sur lesquelles, certes, nous nous entendons. En ce sens, le rapport déjà énigmatique de la mathématique au réel physique, est redoublé de l'intérieur par le rapport non moins énigmatique du langage mathématique avec ce qui paraît à tout le moins s'autonomiser comme son référent. Il n'y a aucune chance, telle est notre hypothèse, d'éclairer le premier sans interroger le second. Et, dira-t-on, si la physique moderne "marche" si bien, c'est peut-être parce qu'en réalité, elle n'est pas une "connaissance" au sens métaphysique, c'est-à-dire une connaissance "objective", mais, comme le disait déjà à peu près Kant, une manière de *nous* entendre, à l'intérieur d'une institution symbolique de langage et de monde, sur les réponses que la nature donne aux questions que *nous* lui posons dans le cadre même de cette institution. L'"objectivité" au sens de l'en-soi ou des "entrailles" de la nature n'est sans doute que le fantôme de nous-mêmes.

Fantôme dont la construction cantorienne nous permet, tout au moins, d'entrevoir la silhouette. Il faut radicaliser la thèse heideggerienne sur l'inscription de la mathématique dans le projet mathématique du *Dasein*[3], en ajoutant que si le mathématique consiste à prendre ce qu'on a déjà (dans "l'apprendre"), on ne sait jamais très bien ce qu'on a: le mathématique est en ce sens irréductiblement *au monde*, c'est-à-dire partie intégrante de la *phénoménalité* de monde,

3. M. HEIDEGGER, *op. cit.*, *loc. cit.*

avec la même *illusion* de transparence. En d'autres termes, sans doute non moins choquants, il y va, dans la mathématique, de la phénoménalité de la pensée, c'est-à-dire de cette modalité (abstraite par la tradition) de l'être-au-monde qu' est la pensée elle-même en tant que projet-de-monde d'un *Dasein*. C'est ce que montre, selon nous, l'existence d'une antinomie quasi-kantienne dans la tentative cantorienne de fonder définitivement sa théorie du transfini et du continu telle qu'elle s'exprime dans une célèbre lettre à Dedekind, datée du 28 juillet 1899[4]. Car en ce sens, la finitude essentielle du *Dasein* n'est pas "moins" à l'œuvre dans la mathématique que dans toute autre dimension de l'activité humaine: l'avoir ne peut en aucune mesure déterminer l'être, et il y a finalement autant de définitions de la mathématique qu'il y a de points de vue métaphysiques sur l'homme et le monde — la mathématique moderne n'est pas liée comme par une fatalité à la métaphysique moderne: nous proposons ici une sorte de prolégomène en vue de l'interprétation *non-métaphysique* de la mathématique, et par là, nous pensons ouvrir un champ nouveau à l'épistémologie, que nous caractérisons par l'adjectif "phénoménologique".

§ 2. *La lettre de Cantor à Dedekind du* 28 *juillet* 1899.

Cantor commence par rappeler qu'il pense être arrivé à définir la suite *bien ordonnée* des cardinaux transfinis:

$$\text{И}_0,\ \text{И}_1,\ \text{И}_2,\ \ldots,\ \text{И}_{\omega_0},\ \ldots^{*}$$

И_{n+1} étant le cardinal transfini qui succède immédiate-

4. Texte allemand in G. Cantor, *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Georg Olms, Hildesheim, 1966, pp. 443 - 447. Traduction française in J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1962, pp. 238 - 244.

* Le signe И désigne conventionnellement aleph.

ment à, c'est-à-dire qui est immédiatement plus grand que $\aleph_n$, et $\aleph_{\omega_0} = \lim_{\nu \to \omega_0} \aleph_\nu$, ω_0 étant le plus petit ordinal transfini.

Notons que ce concept de suite bien ordonnée implique qu'on définisse la succession immédiate dans la suite φ des cardinaux transfinis, ce qui ne va pas de soi, et qu'on définisse le plus petit cardinal transfini, $\aleph_0$, ce qui semble ne pas poser trop de difficultés. Dans la mesure où Cantor ne définit pas la suite φ des cardinaux transfinis et la succession immédiate dans cette suite, on peut dire qu'il la suppose bien plutôt, en indexant ses éléments selon les entiers naturels puis selon les ordinaux transfinis. Il considère que les éléments de cette suite constituent un ensemble semblable à l'ensemble des ordinaux finis et transfinis (deux ensembles sont semblables si l'on peut établir une bijection entre leurs éléments qui conserve leur ordre), et c'est cette considération qui ne va pas de soi.

C'est pourquoi Cantor poursuit en disant que la grande question pour lui était de savoir s'il y avait encore, en dehors des alephs, d'autres puissances d'ensembles — puisque, s'il y en avait, il y aurait des puissances d'ensembles transfinis qui ne seraient *pas comparables* aux alephs, et la suite de ceux-ci ne pourrait être ni la suite bien ordonnée, ni même la suite ordonnée des cardinaux ou des puissances transfinies. Il déclare être en possession, depuis deux ans — c'est-à-dire depuis 1897 —, de la démonstration qu'il n'y a pas d'autres puissances que les alephs, et ainsi, que la puissance du continu linéaire arithmétique (la totalité des nombres réels) est un aleph déterminé (la conjecture de Cantor étant que la puissance du continu est $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, et la conjecture générale du continu étant que $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$). C'est cette démonstration, dont nous allons voir qu'elle est fort complexe et fort problématique, que Cantor va exposer ici[5].

5. Pour une explication "minimale" de ces conceptions et de leurs

Il commence par établir et rappeler certaines définitions utiles à son lecteur Dedekind. Et tout d'abord celle des *multiplicités inconsistantes* ou *absolument infinies:* ce sont des multiplicités ainsi constituées que la considération de l'être-ensemble, du rassemblement de *tous* leurs éléments conduit à une contradiction, en sorte qu'il est *impossible de saisir la multiplicité comme une unité*, comme "une chose toute faite". Dans ce contexte "on se convainc facilement que 'la collection de tout le pensable' est une telle multiplicité (inconsistante)". On nommera donc ensembles des multiplicités consistantes ou *déterminées* — c'est-à-dire dont la détermination complète n'engendre pas de contradiction. Il en résulte que deux multiplicités équivalentes sont, ou bien deux ensembles, ou bien toutes deux inconsistantes — mais nous verrons que dans ce cas la définition de l'équivalence pose un problème insoluble, tout au moins sans l'introduction de l'axiome de choix. Toute multiplicité partie d'un ensemble est un ensemble, et tout ensemble d'ensembles est aussi un ensemble *si l'on résout ceux-ci en leurs éléments* — Cantor prend en compte le fait qu'aucun ensemble ne peut être du même coup ensemble de *tous* ses sous-ensembles.

Après avoir défini le concept de nombre cardinal ou de puissance, Cantor explique la manière dont il en vient à définir le système de toutes les puissances, dont il montrera qu'il constitue une multiplicité inconsistante. Il définit pour cela, successivement, une multiplicité simplement ordonnée, son type d'ordre μ si elle est un ensemble, et la similitude de deux ensembles, une multiplicité bien ordonnée, qu'il appellera désormais *suite* (toute partie d'une suite étant elle-même une suite), et si la suite est un ensemble, son nombre ordinal ou son nombre comme type d'ordre d'un ensemble bien ordonné.

enjeux, nous ne pouvons que renvoyer à notre étude déjà citée, *De l'illusion transcendantale dans la théorie cantorienne des ensembles* (§ 1).

Il considère alors le système Ω de *tout les nombres*, et rappelant que pour α et β, on a toujours $\alpha < \beta$ ou bien $\alpha = \beta$ ou bien $\alpha > \beta$, et pour α, β, γ, si $\alpha < \beta$ et $\beta < \gamma$, alors on a $\alpha < \gamma$, il en conclut que Ω est un système simplement ordonné. Mais il ajoute qu'il résulte aussi des théorèmes "démontrés" sur les ensembles bien ordonnés que toute multiplicité de nombres, c'est-à-dire toute *partie* du système Ω possède un *plus petit* nombre, en sorte que, si on le considère *dans son ordre de grandeur naturel, le système* Ω *constitue une suite*[6].

Cantor poursuit en démontrant l'équivalent du paradoxe de *Burali-Forti* pour les ordinaux, c'est-à-dire en montrant que le système de tous les nombres est une multiplicité inconsistante, absolument infinie. Il considère pour cela la suite Ω':

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \omega_o,\ \omega_o + 1,\ \ldots,\ \gamma,\ \ldots$$

(la suite Ω à laquelle on a ajouté 0 à la première place), où l'on voit que *tout* nombre γ qui se trouve en elle est le type de la suite de tous les éléments qui le précèdent (y compris 0 que l'on n'a ajouté que pour généraliser au fini une propriété qui ne serait valable, dans Ω, qu'à partir de $\omega_o + 1$). On voit facilement que la suite Ω' (et donc la suite Ω qui lui est semblable) ne peut être une multiplicité consistante. Car si c'était le cas, il lui reviendrait, en tant qu'ensemble bien ordonné, un nombre δ qui serait plus grand que tous les nombres du système Ω; or, du fait que le système Ω contient tous les nombres, le nombre δ devrait aussi s'y trouver, et δ serait dès lors plus grand que δ, ce qui est une contradiction. Par suite la multiplicité de tous les nombres ordinaux n'est pas un ensemble: elle est absolument infinie, et cela

6. Notons que cette "démonstration" est, en toute rigueur, insatisfaisante, ce pourquoi nous mettons le terme entre guillemets. Elle suppose l'"intuition" ou la nécessité de la "naïveté" propre à la création cantorienne du transfini.

rejoint le célèbre paradoxe de Cantor sur les cardinaux[7]. En outre, *le même raisonnement*, effectué d'ailleurs par Bolzano au § 15 des *Paradoxes de l'infini*[8], *montrerait tout aussi bien l'inconsistance de la suite* N *des entiers naturels*, ce qui montre que les paradoxes de l'infini ne cessent pas avec le transfini, qui résulte d'un acte de foi non critiqué. Il en résulte donc que la suite Ω, qui comprend pourtant des ordinaux transfinis, baigne elle-même, tout comme la suite N, dans l'*infini potentiel ne pouvant jamais s'actualiser sous peine de contradiction*, et l'on ne voit plus très bien, dès lors, sinon dans la nécessité où s'est trouvé Cantor d'entreprendre des calculs sur l'infini, ou sur des infinis plus ou moins abondants, comme par exemple l'ensemble des nombres réels algébriques et l'ensemble des nombres réels, ce qui peut bien *légitimer*, d'un point de vue philosophique, l'acte de foi constitutif du transfini.

Nous en sommes donc au point où Cantor vient de démontrer l'inconsistance du système Ω de tous les nombres. Il va maintenant entreprendre de démontrer *l'inconsistance du système taw* (dernière lettre de l'alphabet hébreu) *de tous les alephs*, et tout d'abord, de définir un tel système en partant de la suite Ω. Cette définition est simple: en vertu du fait que la similitude d'ensembles bien ordonnés fonde du même coup leur équivalence (qui est un concept moins fort), il revient à tout nombre γ de la suite un cardinal déterminé

$$\bar{\gamma} = \text{И}\ (\gamma),$$

à savoir le nombre cardinal de l'ensemble bien ordonné dont le type est γ. En ce sens, les nombres cardinaux qui reviennent aux nombres transfinis du système Ω peuvent être appelés des alephs, et de cette manière (restrictive), on peut définir

7. Lettre de Cantor à Dedekind du 31 août 1899 (in G. CANTOR, *op. cit.*, p. 448 et J. CAVAILLÈS, *op. cit.*, pp. 244 - 246).

8. B. BOLZANO, *Paradoxien des Unendlichen*, Felix Meiner, Philosophische Bibliothek, Bd. 99, Hamburg, 1955.

le système *taw* de tous les alephs — les alephs sont donc définis rigoureusement *à partir* des ordinaux transfinis, ce qui est naturel puisque le cardinal résulte de l'abstraction de l'ensemble bien ordonné et déjà abstrait en quoi consiste l'ordinal.

Or il se fait que les cardinaux transfinis permettent de constituer des classes Z (c) de nombres transfinis y ayant tous le même nombre cardinal c. En admettant intuitivement que toute multiplicité partie de Ω a un minimum ou un plus petit nombre, il vient que, dans toute classe de nombres, il y a un plus petit nombre γ_0 et un nombre γ_1 tombant en dehors de $Z(c)$. Par conséquent, la condition

$$\gamma_0 \leqslant \gamma < \gamma_1$$

signifie que γ appartient à la classe de nombres $Z(c)$, et toute classe de nombres est un "segment" *(Ausschnitt)* déterminé de la suite Ω — remarquons que γ_1 est, par rapport à ce segment, sa borne supérieure, et qu'en ce sens, tout comme la suite N, $Z(c)$ est un ensemble *ouvert:* c'est important pour saisir ce que signifie la successivité dans la suite Ω, qui n'est donc par là même que dans la suite N tout en présentant avec elle certaines ressemblances (nous y reviendrons). Cette remarque est d'ailleurs faite implicitement par Cantor qui explique que les nombres "*finis*" 1, 2, 3, ... ν, ... constituent *chacun pour soi une classe de nombres finis* auxquels reviennent les cardinaux $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, ..., $\bar{\nu}$, ...; simplement, dans ce cas, vu la confusion du cardinal et de l'ordinal, la classe du nombre $\bar{\nu}$ se réduit au seul nombre ordinal ν — voilà une *différence capitale,* sur laquelle il nous faudra nous interroger, *entre le fini et le transfini,* et qui est peut-être susceptible d'expliquer le concept de successivité dans la suite Ω, à partir du transfini, dans la mesure où, nous le voyons, et c'est là un très grave problème, *le concept de successivité n'est pas homogène tout au long de la suite* Ω, tout d'abord eu égard à la différence entre le fini et le transfini, ensuite eu égard à la différence qu'il y a entre la succession de deux ordinaux transfinis appartenant à la même classe de nombres et la succession entre un ordinal d'une classe de nombres et un ordinal d'une autre classe de nombres, puisqu'il y a là une *discontinuité*, et que, étant infinie au sens potentiel — tout comme la suite N —, toute classe de nombres, même si l'on peut y introduire un bon ordre, peut apparaître comme *inconsistante*, c'est-à-dire inépuisable et jamais close, *le processus de l'individuation* ou de définition des nombres par itérations successives *ne pouvant jamais y être achevé*. Il se pourrait donc bien que la suite Ω soit inconsistante pour d'autres raisons que celle invoquée par Cantor, car il se pourrait bien que la suite Ω ne soit que la *simple juxtaposition* de suites en elles-mêmes inconsistantes (les classes de nombres) donnant *l'illusion* que nous disposons d'une seule et même suite.

Quoi qu'il en soit, Cantor ne s'arrête pas à cette difficulté. Il poursuit en considérant ω_0, le plus petit ordinal transfini auquel revient, comme aleph, $\aleph_0$, en sorte que

$$\aleph_0 = \bar{\omega}_0,$$

donc que $\aleph_0$ soit le plus petit aleph déterminant la classe de nombres α

$$Z(\aleph_0) = \Omega_1$$

tels que $$\omega_0 \leqslant \alpha < \omega_1$$

ω_1 étant le plus petit ordinal transfini[9] dont le nombre cardinal n'est pas égal à $\aleph_0$.

Si l'on pose: $\bar{\omega}_1 = \aleph_1$, alors $\aleph_1$ n'est pas seulement différent de $\aleph_0$, mais il est l'aleph *immédiatement plus grand* que $\aleph_0$, à condition que l'on démontre qu'il n'y a absolument aucun

9. C'est évidemment ce nombre qu'on n'est jamais sûr de trouver (il requiert l'univocité de la définition: *la* plus petite borne supérieure).

nombre cardinal qui soit compris entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$ — ce qui est justement la thèse à démontrer, mais il n'y a pas ici de pétition de principe dans la mesure où Cantor définit les alephs de manière restrictive en partant de la suite Ω et d'elle seule. On obtient ainsi la classe de nombres β

$$Z(\aleph_1) = \Omega_1$$

tels que $$\omega_1 \leqslant \beta < \omega_2$$

où ω_2 est le plus petit nombre transfini auquel ne revient ni $\aleph_0$ ni $\aleph_1$. Cette classe est immédiatement contiguë à la classe Ω_0 et donc lui *succède immédiatement*, et ce, dans la mesure où $\aleph_1$ succède immédiatement à $\aleph_0$ (est l'aleph immédiatement plus grand que $\aleph_0$).

On constitue de la même manière les segments $\Omega_2 = Z(\aleph_2)$, $\Omega_3 = Z(\aleph_3)$, et ainsi de suite, avec les relations évidentes:

$$\overline{\overline{\Omega}}_0 = \aleph_1,\ \overline{\overline{\Omega}}_1 = \aleph_2,\ \ldots\ \overline{\overline{\Omega}}_\nu = \aleph_{\nu+1},$$

$$\text{avec } \sum_{\nu' = 0,\, 1,\, 2 \ldots \nu} \aleph_{\nu'} = \aleph_\nu,$$

qui définissent *la succession immédiate des alephs par la médiation de la succession immédiate des segments* Ωi *de la suite* Ω — et remarquons, encore une fois, que cette successivité immédiate des alephs n'est assurée, chaque fois, que par une *discontinuité* de même nature.

Enfin, parmi tous les nombres transfinis du système Ω, auxquels ne revient aucun $\aleph_\nu$ (avec ν fini), il y en a de nouveau un plus petit, que l'on désigne par $\omega_{o\,\omega_0}$, et qui permet de définir un nouvel aleph:

$$\aleph_{\omega_0} = \overline{\omega}_{o\,\omega_0}$$

définissable aussi par l'égalité

$$\aleph_{\omega_0} = \sum_{\nu = 0,\ 1,\ 2\ldots} \aleph_\nu$$

et que l'on peut caractériser comme le nombre cardinal *immédiatement plus grand* que tous les $\aleph_\nu$ — il n'y a en effet aucune raison de s'arrêter aux ordinaux d'indice fini, ni aux cardinaux d'indice fini, et la succession immédiate est ici définie dans les mêmes termes, moyennant la même discontinuité.

Par là même, ajoute Cantor, on se convainc facilement que le processus de constitution des alephs et des classes de nombres qui leur correspondent du système Ω est absolument sans limite, si bien que le système *taw* de tous les alephs:

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \ldots\ \aleph_{\omega_0},\ \aleph_{\omega_1},\ \ldots\ \aleph_{\omega_{0+1}},\ \ldots$$

constitue dans son ordre de grandeurs (croissant) une suite semblable en système Ω, et dès lors pareillement une *suite inconsistante et absolument infinie*. Ce qui rejoint en un certain sens le paradoxe sur les cardinaux; en un certain sens: c'est-à-dire si l'on présuppose que tous les cardinaux sont des alephs, la proposition voulant dire que puisqu'il n'y a pas d'ordinal qui soit plus grand que tous les autres, *il ne peut pas y avoir d'aleph plus grand que tous les alephs:* les alephs sont eux-mêmes plongés dans l'*infini potentiel* qui ne peut devenir actuel sous peine de contradiction.

Très curieusement, Cantor va tirer parti de cette situation pour démontrer qu'il n'y a pas un seul ensemble dont la puissance ne soit pas un aleph, et ce, parce que c'est dans l'inconsistance même des systèmes Ω et *taw* que réside la raison pour laquelle tous les cardinaux transfinis sont contenus dans le système *taw*. Mais comme on le sait, au moins, par la note de Zermelo[10], la démonstration de Cantor est

10. Cf. J. CAVAILLÈS, *op. cit.*, pp. 250 - 251.

très problématique, soulève d'inextricables difficultés qu'il va nous falloir discuter en détails, car nous allons voir que c'est en elle que se décide, finalement, tout le sort de la théorie, en tant qu'elle subsume toutes ses difficultés. Lisons donc la démonstration de Cantor.

"Si nous prenons une multiplicité *déterminée* V et présupposons qu'*aucun aleph* ne lui revient *comme nombre cardinal*, alors nous concluons que V doit nécessairement *(muss)* être *inconsistante*.

"Car l'on reconnaît facilement que, avec la présupposition qui vient d'être faite, tout le système Ω est projetable à l'intérieur de la multiplicité V, c'est-à-dire qu'il doit exister une multiplicité V' partie de V, qui est équivalente au système Ω.

"V' est inconsistante parce que Ω l'est aussi, et il doit donc en être de même de V (scil. si de deux multiplicités équivalentes, l'une est inconsistante, l'autre l'est aussi).

"Par conséquent toute *multiplicité consistante* transfinie, tout ensemble transfini doit avoir un *aleph déterminé* comme nombre cardinal. Donc

"*Le système taw de tous les alephs n'est rien d'autre que le système de tous les nombres cardinaux transfinis.*

"Tous les ensembles sont dès lors "*dénombrables*" *en un sens élargi*, en particulier tous les '*continua*'" [11].

Par conséquent, si a et b sont deux nombres cardinaux quelconques, $a = b$, ou bien $a > b$, ou bien $a < b$, puisque les alephs possèdent ce caractère des grandeurs *(ibid)*.

Avant d'aborder la note critique très importante de Zermelo, voyons quel est le mécanisme logique de la démonstration. Pour que celle-ci soit concluante, il faut partir d'une multiplicité V pouvant avoir un cardinal qui ne soit pas un aleph, et prouver que cette hypothèse est absurde, parce qu'elle entraîne l'inconsistance de la multiplicité V, c'est-à-dire l'impossibilité radicale de lui attribuer tout nombre

11. G. CANTOR, *op. cit.*, p. 447; J. CAVAILLÈS, *op. cit.*, pp. 243 - 244.

cardinal quel qu'il soit. La pétition de principe de Cantor est alors, on le voit aussitôt, que si tel est le cas, ce cardinal doit être *plus grand que tous les alephs*, donc la multiplicité V *plus abondante en éléments* que la multiplicité Ω, de telle manière que tout le système Ω y soit projetable par une mise en correspondance biunivoque conservant l'ordre entre ses éléments et les éléments de V. Il devrait alors être possible de montrer cette différence d'abondance en ce qu'il ne serait jamais possible d'effectuer cette projection qu'avec *certains éléments choisis* de V, donc avec les éléments d'une multiplicité V′ partie de V. Mais s'il y a cette similitude entre V′ et Ω V′ est inconsistante comme Ω, et par conséquent aussi V dont V′ est partie. Par conséquent, aucun cardinal ne peut être attribué à V, et il n'y a pas de cardinal qui ne soit un aleph.

Que se passerait-il s'il y avait un cardinal *a* tel qu'il soit "compris" entre deux alephs ($\aleph_n < a < \aleph_{n+1}$) ? Si Cantor n'examine pas ce cas, c'est qu'il fait confiance à sa théorie ordinale à laquelle rien n'est censé manquer, et par conséquent à l'*exhaustivité* de la suite Ω tout comme de la suite *taw*. Or n'est-ce pas là que le bât blesse? Qu'y a-t-il dans ces discontinuités entre les classes de nombres? Il y a précisément la présupposition, l'acte de foi constitutif du transfini.

Mais voyons cette démonstration de plus près encore, et examinons la critique de Zermelo. Tout d'abord, le fait que toute la suite Ω des nombres soit projetable à l'intérieur de la multiplicité V qui n'a aucun aleph comme nombre cardinal, ce fait n'a pas été prouvé, mais tiré d'une sorte d'"intuition" assez vague. Sans parler de l'éventualité de nombre cardinaux transfinis compris entre deux alephs, donc en admettant même la cohérence de la théorie cantorienne des ordinaux et des cardinaux — ce que fait Zermelo —, la représentation que se fait Cantor de cette projection est assez problématique: il pense apparemment que les nombres de Ω sont coordonnés à des éléments successifs et arbitraires de V de telle manière que tout élément de V n'est utilisé qu'*une seule fois* — autrement dit, Cantor, de manière très cohérente avec les présupposés philosophiques de sa théorie, présuppose qu'il y a *déjà un ordre sur* V et que tous les éléments de V sont *individués* de manière univoque. Mais alors, poursuit Zermelo, deux cas peuvent se présenter: 1) *ou bien* ce procédé permettrait d'aboutir à un terme dans la mesure où tous les éléments de V seraient épuisés, et V serait dès lors coordonnée à un *segment* de la suite des nombres et, par là, sa puissance serait un aleph contrairement à l'hypothèse, et la possibilité d'épuiser les éléments de V est donc *à rejeter;* 2) *ou bien* V resterait *inépuisable* — ce qui signifierait *l'impossibilité d'achever même à l'infini l'individuation de tous ses éléments* — et elle contiendrait alors une partie équivalente à Ω tout entier, donc une partie inconsistante. C'est dans ce cas que se présente une difficulté de principe, qui constitue le nœud problématique de toute la démonstration.

Selon Zermelo, cette manière de raisonner implique *l'application de l'intuition du temps à un procédé qui dépasse toute intuition*, et l'imagination ou plutôt *la fiction d'un être qui pourrait effectuer des choix arbitraires et successifs*, et par là, *définir une partie* V' *de* V qui n'est justement pas définissable dans les conditions posées — comment savoir, en effet, que les choix arbitraires et successifs d'éléments de V, c'est-à-dire les *individuations successives* que le procédé suppose sont précisément individuations *successives* d'éléments *de* V, alors même que, si V est inépuisable, il est impossible de disposer d'un *critère sûr* (univoquement défini) permettant de décider si un individu quelconque est ou n'est pas un élément de V? Autrement dit, dire que V est inépuisable revient à dire, déjà, qu'il est inconsistant, puisque c'est dire que tous les éléments de V qui peuvent être individués appartiennent *ipso facto* à V', et qu'il existe contradictoirement des "éléments" de V qui ne peuvent être individués (au gré d'une sorte d'"abondance" absolue). Par suite, l'exhibition de V' équivalent à Ω n'est rien d'autre que l'exhibition de cette inconsistance présupposée au départ — il y a quelque chose de circulaire dans le raisonnement.

On connaît la solution de Zermelo à cette difficulté: c'est l'introduction de l'*axiome de choix*, qui ne résout cependant pas tous les problèmes. Zermelo ajoute en effet que seule l'application de l'axiome de choix, qui postule la possibilité d'une *choix simultané* — excluant donc l'itération des choix *dans le temps* —, et que Cantor applique partout inconsciemment et instinctivement sans jamais le formuler expressément, permettrait de définir V', comme partie de V — mais il faudrait pour cela, en vertu même de la formulation de l'axiome, pouvoir décomposer V en *parties disjointes* A, B, C, ...contenant chacune au moins un élément, de manière à pouvoir constituer V' (partie de V) qui aurait exactement un élément en commun avec chacune des parties A, B, C..., bref, *il faudrait que* V *puisse être considérée comme un ensemble.* Zermelo souligne bien, en effet, cette difficulté de la démonstration qui vient de ce qu'elle opère avec des multiplicités inconsistantes, et donc avec des concepts contradictoires, ce qui est propre, déjà, à la rendre logiquement inadmissible — raison pour laquelle, dans sa démonstration du théorème sur le bon ordre (1904, 1908), il s'est fondé seulement sur l'axiome de choix sans utiliser des multiplicités inconsistantes: il n'y est question, en effet, que du bon ordre qui peut toujours être introduit dans un *ensemble.*

Il s'avère donc finalement que la démonstration de Cantor qui prétend fonder la conjecture du continu, est insatisfaisante ou non concluante. La conséquence en est *catastrophique* pour la théorie puisque, *s'il y a des puissances qui ne sont pas des alephs*, cela signifie que toutes les puissances d'ensembles transfinis *ne sont pas comparables,* du moins eu égard aux alephs, donc aussi que la théorie ordinale ne peut être considérée comme exhaustive du transfini ou bien, ce qui revient au même, qu'elle ne suffit pas à définir univoquement le *transfini* qui est *pour ainsi dire transi de toutes parts par de l'infini potentiel*, dont l'actualisation, ou plutôt l'hypothèse de l'actualisation conduit à des contradictions. Il n'y a pas d'autre fondation possible de la théorie que dans une axiomatique visant, précisément, à éliminer ces contradictions, et à poser le transfini de la manière la plus cohérente possible du point de vue logico-mathématique.

§ 3. *L'antinomie quasi-kantienne*

Il n'empêche cependant qu'avec les difficultés rencontrées ici, la théorie cantorienne ne fasse l'épreuve de la fragilité, ou de la fausseté de ses assises philosophiques : de ces difficultés, il nous faut à présent envisager la *critique transcendantale*, c'est-à-dire *la mise en évidence de l'illusion transcendantale qui paraît ici à l'œuvre.*

Reprenons, pour cela, la démonstration. Sa faiblesse réside, on l'a vu, dans la thèse que *toute* la suite Ω soit projetable à l'intérieur de la multiplicité V, et cela, parce que celle-ci a été supposée avoir un cardinal qui n'est pas un aleph. Sans en passer, nécessairement, par l'intuition du temps et son extrapolation indue, comme le fait Zermelo — car à ce titre, c'est déjà vrai dès qu'on prétend rassembler (Frege, Dedekind) et *a fortiori* dépasser l'infini dénombrable Z ($\aleph_0$) —, on peut déjà dire, en effet, qu'il sera à jamais impossible de considérer toute la suite Ω puisqu'elle est déjà inconsistante, puisque sa considération comme *un tout* aboutit déjà à une contradiction. C'est donc *la suite* Ω *comme tout* qui constitue ici *l'illusion transoendantale* nécessaire à la démonstration — si la suite Ω peut paraître comme un tout, c'est seulement dans une *pure apparence transcendantale* dont la réification conduit à une contradiction, celle de Burali-Forti. Si nous comprenons bien le raisonnement de Cantor dans sa teneur "intuitive", il revient à ceci : si la multiplicité V a un cardinal qui n'est pas un aleph ,c'est que ce cardinal, étant supposée l'exhaustivité de la suite *taw*, est plus grand que tout aleph sans cependant être comparable, autrement que par cette simple relation, à un aleph. Cela signifie donc que son type d'ordre, ou son ordinal est plus grand que tout ordinal de la suite Ω, mais impossible à déterminer par les moyens de la théorie ordinale transfinie (selon l'idée d'un trans-transfini, c'est-à-dire d'une transcendance ou d'une abondance absolues de l'infini absolument infini, et nécessairement potentiel). Or il n'y a pas, *dans la suite* Ω, d'ordinal plus grand que tous les autres, et la suite Ω est inconsistante. Donc, si le type d'ordre de V est plus grand que tout ordinal de la suite Ω, c'est qu'il doit être possible de coordonner *tous* les éléments de Ω avec certains éléments de V, constibutifs de V', et si c'est le cas, V' est inconsistant, donc V l'est aussi, donc aucun cardinal possible ne revient à V, donc tout cardinal transfini est un aleph, L'illusion transcendantale est manifestement, ici, que l'on puisse comparer le type d'ordre de V au type d'ordre de Ω: car précisément, si ces deux multiplicités sont inconsistantes, c'est qu'elles sont *inépuisables toutes les deux*, donc que la correspondance terme à terme et conservant l'ordre de leurs éléments est elle-même inépuisable, sans fin assignable possible puisque "monnayable" seulement dans l'infini absolument, infini ou potentiel. Et il en va pareillement, même si l'on introduit l'axiome de choix, car le problème est alors le même que celui que nous rencontrons dans l'argument de la diagonale si on suppose le dénombrable inépuisable: à supposer même qu'on puisse, de proche en proche, diviser la multiplicité V en segments disjoints A, B, C, etc., qui seraient chacun en corrélation avec des éléments de la suite Ω, on ne pourrait jamais savoir, à raison même de l'inépuisabilité de la multiplicité V, et surtout, de son type d'ordre différent d'un ordinal quelconque de la suite Ω, si les segments choisis dans V sont *définitivement disjoints* (ce qui rejoint ce que nous entendions plus haut par "abondance" d'éléments, et l'impossibilité d'achever l'individuation des éléments de V) ; autrement dit, on ne pourrait jamais savoir si, en établissant la corrélation, il n'y a pas dans les segments A, B, C, . . .des *éléments parasites*, non encore individués dans la corrélation, qui pourraient se retrouver à la fois dans plusieurs segments, l'inépuisabilité de V, et son type d'ordre différent d'un ordinal quelconque de la suite Ω pouvant signifier quelque chose comme une *prolifération infinie et multiple des éléments de V* rendant impossible sa disjonction en segments exclusifs — mais il est vrai que par là, nous remettons en question la théorie ordinale de Cantor puisque nous présupposons en fait que la multiplicité Ω *puisse ne même pas être une suite*, à savoir puisse ne pas être susceptible d'être ordonnée à partir d'un premier élément, et dans ce cas, bien sûr, V ne pourrait pas non plus être caractérisé par un cardinal. Mais il n'empêche que cette possibilité purement négative est elle-même ouverte par la réfutation de la thèse selon laquelle V pourrait avoir un cardinal quelconque, c'est-à-dire par la démonstration de l'inconsistance de V.

Nous nous trouvons donc devant une situation extrêmement complexe, puisqu'en réalité *la démonstration aboutit à la réfutation de la démonstration sans pouvoir assurer la validité de la thèse dont la démonstration prétend pourtant démontrer l'absurdité. Nous sommes donc en présence d'une véritable antinomie au sens kantien du terme*, par suite, en présence d'une *illusion transcendantale*, également *au sens kantien du terme*. Reprenons en effet ce qui précède : 1) si la multiplicité V a un cardinal qui n'est pas un aleph, cela signifie que son ordinal est différent de et plus grand que tout ordinal de la suite Ω, c'est-à-dire, en termes cantoriens, plus grand que tout ordinal possible. Or il n'y a pas, dans la suite Ω, c'est-à-dire dans la suite de tous les ordinaux, de tel ordinal plus grand que tous les autres. Donc l'ordinal de V est un ordinal de Ω, et le cardinal de V est un aleph. 2) Il se pourrait cependant que l'ordinal de V soit un "ordinal" qui n'appartienne pas à la suite Ω (puisque son cardinal n'est pas un aleph). Mais alors, la suite Ω pourrait être considérée comme *un tout* semblable à une partie V' de V. Or la suite Ω est inconsistante, donc V' l'est aussi, et par là également V. Mais si V est inconsistante tout comme Ω, *il n'est pas possible de les comparer*, et il se pourrait bien que, ayant un "ordinal" *différent* (de définition différente) et/ou *plus grand que* tout ordinal de Ω, V ait un cardinal *différent* et/ou *plus grand que* tout aleph.

Il y a donc antinomie entre 1) et 2), et elle ne se tient, bien sûr, qui si l'on considère, tout comme semble le faire Cantor ici, en trahissant pour les besoins de la cause la rigueur de ses propres définitions — mais nous allons voir que ce n'est pas sans raisons —, les multiplicités V et V' ainsi que la suite Ω *à la fois* comme des *multiplicités inconsistantes* et comme des *ensembles*, c'est-à-dire comme des multiplicités pouvant être considérées, à d'autres égards, comme des *touts constitués d'éléments bien individués*. C'est donc le fait qu'une multiplicité inconsistante, donc "inépuisable", puisse *paraître* comme un tout constitué d'éléments tous *bien distincts*, qui constitue l'*illusion transcendantale* ou la *pure apparence transcendantale*, mais il faut ajouter aussitôt que *Cantor y est en quelque sorte aveuglément ou spontanément conduit dans la mesure où il n'a jamais fait rien d'autre dans la constitution du transfini stratifié selon les alephs et les classes de nombres*. Il en résulte que l'antinomie *transcendantale* que nous venons de relever dans sa démonstration traverse en réalité *toute* la théorie cantonienne, mais qu'elle ne se retrouve ici que dans la mesure où elle y a été *reportée* par l'acte de foi non critique constitutif du transfini.

La thèse (1) manifeste la *cohérence logique* avec les définitions et la structure de la théorie cantonienne du transfini. Mais l'antithèse (2) manifeste la cohérence de l'*inspiration cantorienne*, qui le conduit à effectuer le même saut qu'il a toujours effectué pour constitituer le transfini, et donc elle provient, dirions-nous, de la *cohérence philosophique* avec les assises philosophiques de la théorie du transfini. L'analogie structurale avec la première antinomie kantienne est en outre encore plus grande si nous remarquons que l'antinomie dont nous venons de proposer une première ébauche joue, non pas comme chez Kant, entre le fini et l'infini, mais entre deux conceptions possibles de l'infini, l'une, celle du *transfini qui pourrait se régler par transposition du fini dans l'infini*, et l'autre qui ne pourrait en rien se régler parce qu'elle serait pour ainsi dire celle d'*un infini absolument infini*.

Reprenons donc l'antinomie sous cet angle. *Thèse:* Si une multiplicité V a un cardinal qui n'est pas un aleph, son "ordinal" est différent de ou plus grand que tous les autres. Or il n'y a pas d'ordinal plus grand que tous les autres parce que la suite Ω est inconsistante ou *absolument infinie*. Donc si la multiplicité V a un ordinal, c'est nécessairement un ordinal de la suite Ω absolument infinie, et elle a, par suite, un cardinal qui appartient à la suite *taw*, c'est-à-dire un cardinal qui est un aleph, qui est repris dans la stratification du transfini à l'infini.

Antithèse: Si une multiplicité V a un cardinal qui n'est pas un aleph, c'est que son "ordinal", "plus grand" que tous les ordinaux de la suite Ω, n'appartient pas à la suite Ω en vertu de sa définition (puisque, dans Ω, il n'y a pas d'ordinal plus grand que tous les autres). Mais alors, c'est que cet "ordinal" définit un tout autre type d'ordre que les ordinaux de Ω, et que Ω peut être considérée comme un tout, un *ensemble* semblable, et par là équivalent, à une *partie* V' de la multiplicité V. Or, en vertu de sa constitution, la suite Ω doit contenir *tous* les ordinaux, mais elle est inconsistante, donc V', et par là V, sont aussi inconsistantes. Mais si V est inconsistante, elle est *absolument infinie*, c'est-à-dire inépuisable, et la corrélation entre les éléments de Ω et certain éléments choisis de V *n'a pas de fin*, si bien que V et Ω sont *absolument incomparables* (il est impossible d'établir univoquement la corrélation supposée). Il se pourrait donc bien que V, ayant un "ordinal" différent et/ou plus grand que tous les ordinaux *de la suite* Ω, ait aussi un cardinal différent et/ou plus grand que tous les alephs, dans une sorte de trans-transfini, ou de transfini *plus proche de l'absolument infini*, en tant que *transcendant au transfini*[12].

Dans la thèse, l'absolument infini joue en faveur de l'assignation d'un aleph à la multiplicité V, alors que dans l'antithèse, c'est l'inverse puisque l'absolument infini sert d'argument pour dire que V et Ω étant "incommensurables" par la corrélation, V pourrait fort bien avoir un cardinal qui ne soit pas un aleph. Tout tient donc effectivement, en fin de compte, à la *possibilité d'achever ou d'épuiser, ou pas*, la corrélation entre une partie V' de V et la suite Ω. Pour parler comme Kant, la Raison mathématique entre en conflit avec elle-même parce qu'elle ne peut se décider, ne disposant pour cela d'aucun moyen, pour l'une ou l'autre solution. Il faut donc bien que quelque part intervienne une instance critique-transcendantale.

Tout le problème vient donc de ce que, *dans la thèse*, on considère deux multiplicités absolument infinies comme comparables (puisque l'ordinal de V doit nécessairement être l'un des ordinaux de Ω), alors que *dans l'antithèse*, on les considère comme absolument incomparables. Mais la *comparabilité est aussi impossible que l'incomparabilité:* la *comparabilité* parce qu'il faut supposer que la suite Ω contient *tous* les ordinaux, ce qui est impossible *en fait* puisqu'elle est inconsistante ou absolument infinie, c'est-à-dire telle précisément que la considération de tous ses éléments en un tout unique conduit à une contradiction et n'est dès lors qu'une illusion; l'*incomparabilité* parce qu'il faut supposer, pour y parvenir, que la suite Ω est un *ensemble* semblable à une partie V' de V, donc que *la suite* Ω *est consistante, pour arguer ensuite de son*

12. Lequel, bien entendu, ne résoudrait rien, puisqu'il serait évidemment traversé par la même aporie, rejetée en lui, dans une régression à l'infini.

inconsistance. A ce titre, le raisonnement qui est exactement le même que celui qui fait passer d'une classe de nombres à une autre, donc déjà que celui qui fait passer de l'infini dénombrable à la deuxième classe de nombres, *ou bien* est valable en ce que ce que ce qui paraît inconsistant à un égard (la suite N à l'égard d'elle-même est inconsistante) peut paraître consistant à un autre égard (l'ensemble N de cardinalité И_o, ou Z (И_n) à l'égard de И_{n+1} et de Z (И_{n+1})), *ou bien* n'est pas valable étant donné qu'une multiplicité ne peut pas être à la fois inconsistante et consistante: or, revenir, comme nous y invite Cantor, d'une sorte de pseudo-consistance de la suite Ω (nécessaire pour épuiser la corrélation entre Ω et V') à l'inconsistance de la suite Ω pour conclure à l'inconsistance de V' et donc de V, pourrait tout aussi bien se faire à propos de la première discontinuité entre le dénombrable et la deuxième classe de nombres, et cela ruinerait la théorie dans ses fondements puisque, de cette manière, on pourrait tout aussi bien dire que la multiplicité inconsistante du dénombrable n'est absolument pas comparable à la multiplicité inconsistante de la deuxième classe de nombres, leur inconsistance ne permettant jamais de dire qu'il y a un ordinal ω_1 qui est plus grand que *tous* les nombres de Z (И_o), et même, si l'on va jusqu'au bout, qu'il y a un ordinal ω_o qui est plus grand que *tous* les entiers naturels (il se pourrait qu'il soit un entier naturel indéterminé, infiniment grand). Si donc l'on suit ce qui n'a cessé de constituer l'inspiration cantorienne, ou l'acte de foi constitutif du transfini, la démonstration de Cantor n'est pas concluante — sinon eu égard au transfini qu'il a supposé constitué avec sa théorie ordinale et la théorie cardinale qui en résulte —, et l'antithèse est aussi défendable que la thèse.

On ne peut donc dire que la suite Ω contienne *tous* les ordinaux possibles ou pensables, et que la suite *taw* contienne *tous* les cardinaux possibles ou pensables, ni non plus, d'ailleurs, qu'elles ne les contiennent pas (il n'est pas possible de se débarrasser de l'illusion constitutive de l'antionomie). C'est tout simplement une *question indécidable*, et cela justement, en vertu de l'inconsistance de ces multiplicités, en vertu du fait que considérer *une* multiplicité *inconsistante* est déjà une contradiction dans les termes, un *pseudo-concept* ou une *illusion transcendantale de la pensée*, où la pensée est aux prises avec sa phénoménalité propre, c'est-à-dire une *pure apparence transcendantale* dont la réflexion, *a posteriori*, dans une *apparence d'adéquation de l'a posteriori* à *l'a priori*, conduit à une contradiction, mais aussi à une antinomie de type kantien ou quasi-kantienne. Il faut nous efforcer de démêler cette situation, d'abord en ce qui concerne l'antinomie, ensuite en ce qui concerne le sens de la théorie cantorienne.

Reprenons donc, encore une fois, l'antinomie: ce qui est en cause, c'est le caractère *inconditionné* des alephs, c'est-à-dire en fait le caractère inconditionné ou *auto-consistant de l'institution cantorienne du transfini*, puisque ce caractère s'évanouit s'il existe des "nombres cardinaux" qui ne sont pas des alephs, et s'il existe, par suite, des "nombres ordinaux" qui peuvent ne pas être repris dans la suite Ω. Et c'est justement ce caractère inconditionné qui est *indécidable* par les moyens propres de la théorie, et qui doit conduire au point de vue d'une *relativité du transfini* eu égard à une instance transcendantale constitutive que nous devons nous efforcer de dégager, de manière *intrinsèque* puisqu'il n'y en a pas d'autre possible.

Thèse: le transfini cantorien est inconditionné. Si une multiplicité V a un cardinal qui n'est pas un aleph, son ordinal est différent de et plus grand que tous les autres. Or il n'y a pas d'ordinal plus grand que tous les autres *parce que* la suite Ω est *inconsistante*, absolument infinie, *et contient tous* les ordinaux possibles. Donc l'ordinal de V est nécessairement un ordinal de la suite Ω, et son cardinal correspondant est un aleph. Le point où la thèse s'oppose à l'antithèse est celui en lequel la suite Ω, quoiqu'*inconsistante*, contient *tous* les ordinaux possibles. Et l'antithèse s'alimente à la thèse en déclarant, à juste titre, que si Ω est inconsistante, elle ne peut contenir *tous* les ordinaux possibles puisque ce serait *ipso facto* la considérer comme un ensemble ou une multiplicité consistante. Donc la thèse n'est pas concluante.

Antithèse: le transfini cantorien n'est qu'un conditionné plongé dans un inconditionné de niveau supérieur. Si une multiplicité V a un cardinal qui n'est pas un aleph, c'est que son ordinal, plus grand que tous les ordinaux de la suite Ω, en est *différent*. Notons que cette conclusion, qui s'alimente à la théorie (Ω contient *tous* les ordinaux possibles), peut se formuler sans la médiation du "plus grand", mais présuppose néanmoins que la suite Ω définisse une *totalité*, c'est-à-dire un *ensemble* d'ordinaux bien distincts, *inconditionné*. Il en résulte à son tour que l'ordinal de V définit un tout autre type d'ordre que les ordinaux de Ω. Or, comme ceux-ci sont censés constituer les ordinaux de manière *exhaustive*, c'est-à-dire inconditionnée (encore le même argument tiré de la thèse), il faut que ce type d'ordre soit incomparablement plus grand que tout ordinal de Ω, donc qu'il constitue à son tour une *borne supérieure et inconditionnée* à tous les ordinaux de Ω. Mais alors (réfutation de l'argument tiré de la thèse) la suite Ω constitue un *ensemble* dont les éléments peuvent être mis en corrélation avec certains éléments de V, constitutifs de V' partie de V; or la suite Ω (toujours arguments tiré de la thèse) est inconsistante, donc aussi V' et V. Donc V est absolument infinie ou inépuisable, et une corrélation entre V' et Ω est impossible parce qu'elle n'a pas de fin, donc V n'a pas de cardinal assignable, par conséquent pas d'aleph (confirmation de la thèse: si V est inconsistante, elle n'a pas de cardinal du tout). Mais il se peut toujours que, si Ω est inconsistante, elle ne le soit qu'eu égard à la théorie ordinale constituée, et pas eu égard à l'ordinal de V, borne supérieure de tous les ordinaux de Ω. Il se pourrait donc (réfutation de la thèse) que V soit également consistante d'un point de vue supérieur, et que, par là, lui soit assignable un nombre cardinal qui n'est pas un aleph. Mais cela ne résout nullement l'antinomie puisque ce cardinal permettrait à son tour de constituer une nouvelle classe de nombres, donc une suite Ω^{bis}, et une nouvelle suite de cardinaux, *taw* ^{bis}, ce qui relancerait l'antinomie et le processus de formation à l'infini, ou ce qui, étant reconnue l'absurdité d'une telle manière de procéder (ne faisant que prolonger celle de Cantor), ne pourrait que renvoyer à la thèse, revenant finalement à dire qu'il n'y a pas d'autres moyens de définir les nombres transfinis (cardinaux et ordinaux) que ceux donnés par la théorie.

La *thèse* revient donc à dire que le transfini cantorien est un inconditionné parce qu'il constitue *la seule manière de stratifier l'infini actuel en une suite d'infinis actuels* (les ordinaux et les cardinaux transfinis) *plongés dans l'infini potentiel*, c'est-à-dire précisément en *une suite absolument infinie d'infinis actuels* — tout étant dans le "absolument". Au contraire, l'*antithèse* revient à dire que le transfini cantorien n'est qu'un conditionné parce qu'il ne constitue pas la seule manière de stratifier l'infini actuel, c'est-à-dire parce qu'il existe un autre inconditionné, de niveau supérieur, à savoir des nombres (ordinaux et cardinaux) actuellement infinis qui ne sont pas repris dans la stratification cantorienne, et qui conditionnent cette dernière en tant que, finalement, ils permettent de la définir (puisque c'est cet inconditionné de niveau supérieur qui permet de considérer la suite Ω comme la suite de *tous* les ordinaux cantoriens et la suite *taw* comme la suite de *tous* les cardinaux cantoriens, à savoir de *tous* les alephs). L'antinomie est donc régie par l'impossibilité d'actualiser l'infini potentiel (thèse), ou par la possibilité de l'actualiser (antithèse) en un infini actuel de niveau supérieur au transfini. Dans le premier cas, le processus d'actualisation de l'infini potentiel par le transfini cantorien est *absolu* mais *sans fin*, *illimité*, alors que dans le second, ce même processus d'actualisation de l'infini potentiel par le transfini cantorien est *relatif* et *limité* par une borne supérieure qui joue, à son égard, le rôle d'un inconditionné. Si donc le transfini cantorien est *absolu* ou inconditionné, il est stratifié de manière *illimitée*, mais s'il est *relatif* et conditionné, sa stratification doit pouvoir rencontrer la *limite* de son inconditionné, qui est un infini absolument actuel d'ordre supérieur, pouvant à son tour être stratifié, et ainsi de suite à l'infini, ce qui ramène au premier cas, celui de la thèse. Tout le problème vient donc de ce qu'on ne dispose d'aucun critère intrinsèque permettant de placer la *limite* au processus d'actualisation de l'infini potentiel, ou de ce que cette limite est *arbitraire* aussi bien dans la thèse que dans l'antithèse, et que, dès lors qu'elle est placée, elle entraîne la Raison mathématique dans un conflit avec elle-même. C'est donc *cette limite elle-même*, c'est-à-dire la possibilité d'épuiser l'infini potentiel par actualisations successives au sein du transfini, ou au sein de transfinis de degrés diffé rents (transfini, trans-transfini, etc.), *qui constitue une illusion transcendantale*, quelque chose comme le *phénomène nécessaire de la pensée*, que la pensée se projette pour simplement pouvoir penser, mais *auquel rien ne correspond a priori* à moins d'une antinomie et de contradictions intrinsèques.

Or il se fait que l'on pourrait construire exactement la même antinomie pour ce qui concerne le passage d'une strate à l'autre du transfini, et déjà pour ce qui concerne le passage de l'infini dénombrable de la suite N à la première classe de nombre $Z(\aleph_0)$: il suffit de prendre pour suite Ω la suite N inconsistante ou absolument infinie, et pour suite *taw* la même suite considérée comme suite de cardinaux. S'il n'y a pas d'autres cardinaux que les alephs, il n'y en a pas d'autres non plus que les cardinaux de la suite N, et s'il doit y en avoir d'autres, alors il y a bien un cardinal transfini, le tout se jouant sur la *limite* ou la borne supérieure de l'infini N dénombrable, qui est impossible à situer, comme l'avait déjà vu Richard. Par conséquent, le plus petit ordinal transfini, ω_0, relève déjà de l'illusion transcendantale, tout comme le plus petit cardinal transfini $\aleph_0$, qui présuppose que la suite N *inconsistante* peut néanmoins constituer un *ensemble*. Il en résulte que, si nous pénétrons de cette manière dans les soubassements de la théorie, le *transfini* en tant que constituant une *limite* (une strate) définie, ne fait que paraître comme une *illusion transcendantale, une pure apparence transcendantale de la pensée* conduisant celle-ci à un irréductible conflit avec elle-même, et que la stratification du transfini n'est possible, tout comme déjà la suite N, que par la réification ou l'ontologisation de cette illusion transcendantale, c'est-à-dire par sa mutation en *simulacre ontologique* en vertu duquel c'est *comme si* le transfini existait dans l'*a priori* ou dans l'être. Le transfini comme simulacre ontologique permet de faire comme si une suite en elle-même inconsistante (une quelconque classe de nombres) pouvait être considérée, chaque fois, comme un ensemble, et ce, parce que, du simple fait qu'on considère une multiplicité inconsistante comme *une* multiplicité, on considère un phénomène qui n'est pourtant qu'une *pure apparence transcendantale* de la pensée.

On serait tenté de conclure par là que la catégorie de totalité est constitutive d'une illusion transcendantale dès lors qu'elle s'applique à une multiplicité *infinie*. Or, ce qui seul permet de constituer le fini d'un point de vue transcendantal est la suite N des nombres naturels individués. Mais nous avons montré ailleurs, à propos de Frege et de Dedekind [13], que la constitution de la suite N relève elle-même d'un simulacre ontologique (en lequel se donne l'illusion qu'il y a *une* origine, une répétition originaire dont toute répétition est la répétition), donc d'une illusion transcendantale (que cette répétition originaire a toujours déjà eu lieu *a priori* dans l'*a priori*). Par conséquent, *déjà au niveau du fini*, la position

13. Pour Frege, dans *L'hérédité et les nombres*, *La liberté de l'esprit*, n° 4, Balland, Paris, 1983, pp. 77 - 137. Pour Dedekind, dans notre *IV*e *Recherche phénoménologique*, in *Recherches phénoménologiques*, *IV*, *V* (2e vol.), Ousia, Bruxelles, 1983, pp. 12 - 109.

d'une limite n'est que relative à cette illusion transcendantale, et donc *la catégolie de la totalité est* déjà *constitutive d'une illusion transcendantale* si l'on considère que cette totalité est absolue, c'est-à-dire constituée d'éléments *a priori*, *bien distincts*, de la pensée. Autrement dit, la totalité n'est jamais que *relative*, toujours appelée à être rouverte, et ce, simplement *parce que l'individuation de ses éléments ne peut jamais être considérée comme achevée ou absolue*. Il en résulte que c'est *le concept même d'ensemble* qui est constitutif d'une *illusion transcendantale dès lors, tout au moins, qu'on le considère comme absolu*. Le monde ne peut jamais être considéré comme constitué d'ensembles que dans une *fiction provisoire*, corrélative d'un point de vue limité, c'est-à-dire *relatif* au contexte dans lequel s'effectue le découpage toujours lié à une loi de constitution particulière et partielle ne pouvant jamais être prise comme une loi de constitution ontologique. Il n'ensuit donc que la *théorie des ensembles* n'est elle-même, d'un point de vue transcendantal, qu'une *fiction transcendantale de la pensée*, où la pensée est irréctiblement aux prises avec ses phénomènes (les ensembles) pris dans l'horizon de sa phénoménalité: *une théorie abstraite des ensembles, dégagée de toute intuition de la pensée, est une pure fiction de cette fiction transcendantale*, ou un pur mythe résultant de l'ontologisation intégrale du monde en choses, en étants. Ou mieux, elle procède de l'*institution symbolique* d'uns bien distincts et chacun identique à soi.

Les conséquences pour une possible théorie transcendantale de l'abstraction transcendantale n'en sont pas moins importantes. Car il résulte de tout ceci que *seule la multiplicité a un statut transcendantal non illusoire* — pour ainsi dire: seule la multiplicité est "originaire", dans le rythme des répétitions ou le schème transcendantal où la répétition se répète comme se répétant[14] —, que la catégorie de totalité est immédiatement génératrice d'une illusion transcendantale, ainsi que

14. *Cf. Ibid.*

la catégorie de l'unité, que ce soit dans son union synthétique avec la catégorie de la multiplicité puisqu'elle engendre alors la totalité, ou que ce soit en tant que catégorie s'appliquant à l'*a priori*, puisque, précisément, de l'*a priori* nous ne pouvons *rien* savoir, sinon *a posteriori*, c'est-à-dire depuis la multiplicité, donc pas même qu'il est "un" ou unique — l'Un lui-même est une illusion transcendantale, la pure apparence transcendantale en laquelle l'*a priori* comme tel apparaît, ou plutôt paraît *comme* Un, et à ce titre, on ne peut même pas dire de l'*a priori* qu'il soit ou ne soit pas, qu'il soit ou ne soit pas en soi autre chose qu'une simple *illusion transcendantale* nécessaire de la pensée, ou l'être insondable (au sens heideggerien) en lequel puise toute ontologisation ou toute réification du phénomène en étant. Tout ce que nous pouvons en dire, c'est qu'il est *pour nous* une *illusion transcendantale* qui est nécessaire à la pensée, s'exerçant toujours *a posteriori*, en quelque sorte comme *instance symbolique*, pour pouvoir, tout simplement, penser. Dans ce contexte, il n'y a donc pas de *mathématique transcendantale*, c'est-à-dire que la *philosophie transcendantale ne peut rien prescrire à la pensée mathématique*, et c'est en ce sens que nous nous démarquons radicalement de l'école intuitionniste de Brouwer et Heyting. Placée *tout entière* sous le signe de l'illusion transcendantale, *dans le champ phénoménal créé par l'illusion transcendantale*, champ phénoménal où il y va de la phénoménalité de la pensée, la mathématique ne peut recevoir de critère régulateur venant de la philosophie transcendantale. Sa régulation ne peut venir que de critère intrinsèques, c'est-à-dire à la fois mathématiques et logiques, comme l'ont d'ailleurs toujours bien compris les mathématiciens et les logiciens, hostiles aux prescription venues de la philosophie. La mathématique en ressort d'ailleurs complètement transformée aux yeux du philosophe, puisqu'elle paraît comme cette entreprise, littéralement *fantastique, de régler et de discipliner le champ phénoménal de la pensée créé par l'illusion transcendantale et son institution symbolique:* la logique pure, comme le disait bien Kant, est une logique de l'illusion, à quoi nous ajoutons que la mathématique est peut-être le seul traitement cohérent possible de l'illusion transcendantale, mais d'une cohérence qui paraît justement incohérente ou génératrice de conflits et d'antinomies internes à la pensée dès lors qu'on la met à l'épreuve de la réflexion critique-transcendantale puisque la mathématique nous apparaît comme *la fiction systématique constituant un système de fictions, de pures apparences transcendantales de la pensée*, et faisant *comme si*, pour s'organiser en un tel système, *ces pures apparences étaient des êtres fixes, stables, parfaitement bien individués*, en ce qui est le lieu de l'institution symbolique de la mathématique.

Car il n'empêche que, par ailleurs, il y ait une logique possible des pures apparences transcendantales de la pensée (les nombres, les ensembles), et donc une logique transcendantale articulant leur constitution. Si la pensée se retrouve toujours déjà dans le champ phénoménal de phénomènes multiples, si la pensée se meut toujours déjà dans l'*a postériorité* d'une multiplicité de phénomènes, il n'empêche qu'elle s'y oriente aussi, toujours déjà, par la médiation des catégories d'unité et de totalité, qu'elle constitue dans cette multiplicité des groupements, des systèmes, des relations, en lesquelles s'établit chaque fois la corrélation des trois catégories de la quantité, la corrélation de l'unité d'un point de vue et de l'unité d'une multiplicité rassemblée en totalité. Par là, nous nous acheminons vers une théorie transcendantale du concept, c'est-à-dire vers une esquisse pour ainsi dire hyper-kantienne de philosophie critique du concept où se montreront davantage les conditions transcendantales constitutives dans lesquelles s'exerce la pensée mathématique, ou, ce qui revient au même, où apparaîtra plus clairement le statut transcendantal de la mathématique, ainsi que de la théorie cantorienne des ensembles. Moyennant cela, il est possible d'envisager une "critique de la Raison pure mathématique", en tant que critique de la logique de l'illusion transcendantale, qui coïncide avec une critique de l'institution symbolique de monde et de langage en laquelle s'institue le mathématique — s'il y a une critique possible de la logique de l'illusion transcendantale, c'est que cette logique n'est pas elle-même, du moins entièrement, illusoire, car tel est le paradoxe auquel nous conduit toute notre démarche, en ce sens fidèle à celle de Kant, qu'il y a une "nécessité" dans l'institution symbolique, et que le logico-mathématique, sans origine phénoménologique, contrairement à ce que pensait Husserl, ne commence qu'avec elle [15].

Marc RICHIR

15. Dans les termes de nos *Recherches phénoménologiques (op. cit.)*, la "critique de la Raison pure mathématique" relève, *dans son versant positif, de l'anthropologie philosophique* (d'une philosophie de l'institution symbolique) et non pas de l'anthropologie phénoménologique, qui ne concerne comme c'est ici le cas, que son *versant négatif*.